DUALIDAD ALGEBRA–GEOMETRIA

A anillo conmutativo

$A_n = A[x_1, \dots, x_n]$

$A^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A\}$

La aplicación de evaluación

$$ev : A_n \times A^n \longrightarrow A$$
$$(f, x) \longmapsto f(x)$$

permite definir una correspondencia entre subconjuntos de A_n y de A^n:

para $E \subset A_n$, $\mathcal{V}(E) = \{x \in A^n \mid f(x) = 0 \ \ \forall f \in E\}$

(otras notaciones: $A_n(E) = E^\perp = E'$)

para $X \subset A^n$, $\mathcal{I}(X) = \{f \in A_n \mid f(x) = 0 \ \ \forall x \in X\}$

(otras notaciones: $A_n(X)$, $= X^\perp = X'$)

Prop 1

a – $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \mathcal{V}(E_1) \supset \mathcal{V}(E_2)$

b – $X_1 \subset X_2 \Rightarrow \mathcal{I}(X_1) \supset \mathcal{I}(X_2)$ ($B \subset C \Rightarrow B^\perp \supset C^\perp$)

c – $\forall E \subset A_n$, $E \subset \mathcal{I}\mathcal{V}(E)$ ($E \subset E^{\perp\perp}$)

d – $\forall X \subset A^n$, $X \subset \mathcal{V}\mathcal{I}(X)$ ($X \subset X^{\perp\perp}$)

e – $\forall E \subset A_n$, $\mathcal{V}(E) = \mathcal{V}\mathcal{I}\mathcal{V}(E)$

f – $\forall X \subset A^n$, $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{I}(X)$

} ($B^\perp = B^{\perp\perp\perp}$)

* en general, vale $\mathcal{V}(\prod E_j) \supset \bigcup \mathcal{V}(E_j)$
$\cup \qquad \cap$
$\mathcal{V}(\cap \langle E_j \rangle)$

y vale $\mathcal{V}(\prod E_j) \subset \bigcup \mathcal{V}(E_j)$
si A es íntegro
(contraejemplos?)

Prop 2

a – $\forall X \subset A^n$, $\mathcal{I}(X) \subset A_n$ es un ideal.

b – Sea $E \subset A_n$ y $\langle E \rangle \subset A_n$ el ideal generado.
Entonces $\mathcal{V}(E) = \mathcal{V}(\langle E \rangle)$

Def $X \subset A^n$ es un conjunto algebraico
si $\exists E \subset A_n \;/\; X = \mathcal{V}(E)$
$(\Leftrightarrow \exists$ ideal $I \subset A_n \;/\; X = \mathcal{V}(I))$

Tenemos:

$$\{\text{ideales de } A_n\} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \{\text{conjuntos algebraicos en } A^n\}$$

$$I \longmapsto X = \mathcal{V}(I)$$

$$I = \mathcal{I}(X) \longleftarrow\!\shortmid X$$

(no son biyecciones) $\alpha \circ \beta = id$ por 1-e
$\beta \circ \alpha \neq id$

Ej si $f \in A_n$, $X = \mathcal{V}(f)$ hipersuperficie con ecuación f.

Ej $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, $\{a\} = \mathcal{V}(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ (punto)

Prop 3

a – $\mathcal{I}\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{I}(X_i)$

b – $\mathcal{V}\left(\bigcup_{j \in J} E_j\right) = \bigcap_{j \in J} \mathcal{V}(E_j)$

c – $\mathcal{I}\left(\bigcap_{i=1}^{m} X_i\right) \underset{\subset ?}{\supset} \sum_{i=1}^{m} \mathcal{I}(X_i) \quad \left(\underset{def}{=} \left\langle \bigcup_i \mathcal{I}(X_i) \right\rangle\right)$

d – $\mathcal{V}\left(\prod_{j=1}^{m} E_j\right) \underset{\supset \checkmark}{\overset{A}{=}} \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{V}(E_j)$ $\quad \prod_{j=1}^{m} E_j = \{a = \prod_{j=1}^{m} a_j,\ a_j \in E_j\}$

$\subset$ A íntegro $\quad (\Rightarrow = \mathcal{V}(\cap \langle E_j \rangle))$

Cor
b $\Rightarrow$ $\cap$ de conj. alg. es conj. alg.
d $\Rightarrow$ $\cup$ finita

Ej $\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}(f^2)$, $f \in A_n$.

def Sea $J \subset A$ ← ideal.

$$\sqrt{J} = \{ a \in A \mid \exists m \in \mathbb{N},\ a^m \in J \}$$

$\sqrt{J}$ ← ideal de A, $J \subset \sqrt{J}$.

radical de J.

Se dice que J es ideal radical

si $J = \sqrt{J}$. Lo que $\sqrt{\sqrt{J}} = \sqrt{J}$, $\sqrt{J}$ es radical, $\forall J$.

Prop 4

a - $\mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(\sqrt{J})$ (sup. A reducido no tiene elementos nilpotentes $\neq 0$)

$a^m = 0 \Rightarrow a = 0$

b - $\forall X \subset A^n$, $\mathcal{J}(X)$ es ← ideal radical.

c - $\sqrt{J} \subset \mathcal{J}\mathcal{V}(J)$

Obs - b refina 2-a.

- c refina 1-c.

Tenemos la realidad correspondencia

$$\{\text{ideales radicales de } A_n\} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \{\text{conjuntos algebraicos de } A^n\}$$

Es biyectiva ahora?

$$J \xrightarrow{\alpha} \mathcal{V}(J) \xrightarrow{\beta} \mathcal{J}\mathcal{V}(J) \overset{?}{=} J$$

$$X \xrightarrow[\beta]{} \mathcal{J}(X) \xrightarrow[\alpha]{} \mathcal{V}\mathcal{J}(X) = X \quad \text{por}$$

X algebraico, $X = \mathcal{V}(J)$

Q

Teorema (de los ceros de Hilbert)

Si A es un cuerpo algebraicamente cerrado entonces $\mathcal{I}\mathcal{V}(J) = \sqrt{J}$, $\forall J$ ideal en A_n.

Cor para J radical, $\mathcal{I}\mathcal{V}(J) = J$

(y entonces $\alpha = \beta^{-1}$)

Ej $f \in K_n$, $f = \prod f_i^{n_i}$
$\sqrt{(f)} = (\prod f_i)$ f_i irred.

Ej sea $A = \mathbb{R}$, $J = (x^2+1)$ $(J = \sqrt{J})$

$\mathcal{V}(J) = \emptyset \to \mathcal{I}\mathcal{V}(J) = (1) \supsetneq J$

Ej $\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}(g) \overset{?}{\iff} f = \lambda g$ $(\lambda \in K^*)$ (cierto para $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ irreducibles, falso en $\mathbb{R}$)

Def Sea $X \subset A^n$ un conj. algebraico.

Decimos que X es reducible si

$\exists X_1, X_2$ alg. / $X = X_1 \cup X_2$ $X_i \subsetneq X$.

Decimos que X es irreducible si no es reducible.

Prop X irreducible $\iff \mathcal{I}(X)$ ideal primo.

($J \subset A$ primo: $ab \in J \Rightarrow a \in J$ o $b \in J$)

Dem ($\Leftarrow$) $X = X_1 \cup X_2$, $X_i \subsetneq X$

$X_1 \subsetneq X \to$ ~~$\exists f_1 \in \mathcal{I}(X_1)$, $f_1 \notin \mathcal{I}(X)$~~ $\mathcal{I}(X_1) \supsetneq \mathcal{I}(X)$

sea $f_1 \in \mathcal{I}(X_1) - \mathcal{I}(X)$, $f_2 \in \mathcal{I}(X_2) - \mathcal{I}(X)$

$f = f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{I}(X) \Rightarrow \mathcal{I}(X)$ no es primo.

($\Rightarrow$) Sup $f_1, f_2 \in A_n$, $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{I}(X)$

sea $X_i = X \cap \mathcal{V}(f_i) \Rightarrow X = X_1 \cup X_2 \Rightarrow X_1 = X$ o $X_2 = X$

$\Rightarrow X \subset \mathcal{V}(f_1) \Rightarrow f_1 \in \mathcal{I}(X)$ ✓

Un a la correspondencia α, β

ideales primos $\leftrightarrow$ conjuntos algebraicos irreducibles.

Tabla: ideales maximales de K_n $\leftrightarrow$ puntos de K^n

Recordar: A anillo noetheriano

$\Rightarrow A[x]$ noeth. (Hilbert)

$\Rightarrow K[x_1, \dots, x_n] = K_n$ noetheriano

Consecuencias:

1) $X = \mathcal{V}(E)$, $E \subset K_n$

puedo reemplazar E por el conjunto finito

ya que $\mathcal{V}(E) = \mathcal{V}(J)$ $J = \langle E \rangle$

y $J = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ por Hilbert.

2) Toda cadena decreciente de conjuntos algebraicos $X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ en K^n es estacionaria.

Toda familia $\mathcal{X}$ no vacía de conjuntos algebraicos en K^n tiene elemento minimal.

En efecto, si $X_i = \mathcal{V}(J_i)$ $X_i \supset X_{i+1}$

$\Rightarrow \mathcal{J}(X_i) \subset \mathcal{J}(X_{i+1})$ $\Rightarrow \mathcal{J}(X_N) = \mathcal{J}(X_{N+1}) = \cdots$

$\Rightarrow X_N = X_{N+1} = \cdots$ ya que $X_i = \mathcal{V}\mathcal{J}(X_i)$

Prop Sea $X \subset K^n$ un conjunto algebraico.
Existen ~~...~~, y son únicos, conjuntos alg. irreducibles $X_1, \dots, X_m$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$, $X_i \not\subset X_j, \forall i \neq j$
(los X_i se llaman componentes irreducibles de X)

Dem Existencia: sup. $\exists X$ que no se escribe como unión de irreducibles
Sea $\mathcal{X}$ la familia de tales X y sea $X \in \mathcal{X}$ minimal.
X no puede ser irreducible.
Sea $X = X_1 \cup X_2$, $X_i \subsetneq X \Rightarrow X_i \notin \mathcal{X}$
$\Rightarrow X_i =$ unión de irred $\Rightarrow X$ unión de irred
contradicción.
La condición $X_i \not\subset X_j$ se obtiene desechando.
Unicidad: sup $\bigcup_{i=1}^{m} X_i = \bigcup_{j=1}^{m'} X'_j$
$\Rightarrow X_1 = \bigcup_{j=1}^{m'} X_1 \cap X'_j$; X_1 irreducible $\Rightarrow$
$\exists j_0 \,/\, X_1 \subset X'_{j_0}$
De la misma manera, $\exists i_1 \,/\, X'_{j_0} \subset X_{i_1}$
$\Rightarrow X_1 \subset X_{i_1} \Rightarrow i_1 = 1 \Rightarrow X_1 = X'_{j_0}$

De la misma manera, cada $X_i = X'_j$ para un único $j = j(i)$ ✓

Ej $X = V(f)$ $f = \prod f_i^{\mu_i}$ $f_i \in K_n$ irred. $(K = \bar{K})$
$X = \bigcup X_i$ $X_i = V(f_i)$ comp. irreducibles

Sea A anillo,

$X \subset A^n$, $Y \subset A^m$ conjuntos algebraicos

Sea $A^n \xrightarrow{F} A^m$ una aplicación polinómica

$F = (F_1, \dots, F_m)$ $F_i \in A_n$

F induce un morfismo de anillos

$$A_n \xleftarrow{F^*} A_m$$

$$F^*(g(y_1, \dots, y_m)) = g(F_1(x), \dots, F_m(x))$$

(vale decir, el único morfismo tal que $y_i \longmapsto F_i$, especialización)

Prop $F(X) \subset Y \iff F^*(\mathcal{I}(Y)) \subset \mathcal{I}(X)$

dem ($\Rightarrow$) sea $g \in \mathcal{I}(Y)$, $(F^* g)(x) = g(F(x)) = 0$

para $x \in X \Rightarrow F^* g \in \mathcal{I}(X)$

($\Leftarrow$) sea $x \in X$, hay que ver $F(x) \in Y$.

Sea $g \in \mathcal{I}(Y)$; basta con ver $g(F(x)) = 0$

Pero $g(F(x)) = (F^* g)(x) = 0$ pues $F^* g \in \mathcal{I}(X)$.

Def Para $X \subset A^n$ algebraico

$A[X] = A_n / \mathcal{I}(X)$ anillo de coordenadas de X
(es una A-álgebra)

Obs Una aplicación polinómica $X \xrightarrow{F} Y$
induce un morfismo de A-álgebras

$F^* : A[Y] \to A[X]$ por la Prop

Obs cada polinomio $f \in A_n$ induce una función $\tilde{f} : A^n \to A$

→ se tiene un morfismo de A-álgebras

$$A_n \longrightarrow A^{(A^n)} = \{\text{funciones } A^n \to A\}$$
$$f \longmapsto \tilde{f}$$

Si $X \subset A^n$ algebraico, tenemos

$$A_n \longrightarrow A^X$$
$$f \longmapsto \tilde{f}|_X$$

con núcleo $\mathcal{I}(X)$, de donde

$$A[X] = A_n/\mathcal{I}(X) \hookrightarrow A^X$$

Valencia
⇒ los elementos de $A[X]$ se pueden pensar como funciones (polinómicas)

$$X \to A$$

Ejemplos de aplicaciones polinómicas

1) $K \xrightarrow{\alpha} K^3$
$t \longmapsto (t, t^2, t^3)$

o) $K \to K^2$
$(p(t), q(t))$ curva paramétrica polinomial.

* $\alpha(K)$ es una "curva" en K^3

proyecciones coordenadas:

$t \mapsto (t, t^2)$ parábola. $\quad x^2 = y$

$t \mapsto (t, t^3)$ cúbica. $\quad x^3 = y$

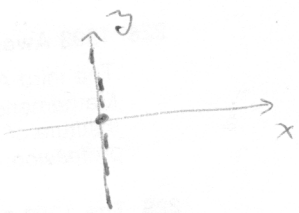
$t \mapsto (t^2, t^3)$ curva semicúbica $\quad x^3 = y^2$

$\operatorname{im}\alpha = ?$

2) aplicaciones lineales $K^n \to K^m$

3) $K^2 \longrightarrow K^2$
$f(x,y) = (x, xy)$





$f(0,y) = (0,0)$ contrae eje y

$\operatorname{im} f = \left(K^2 - \{x=0\}\right) \cup \{(0,0)\}$ no es conjunto algebraico.

$K^2 - \{x=0\} \xrightarrow{f} K^2 - \{x=0\}$

es biyectiva.

$f^{-1}(x,y) = (x, \frac{y}{x})$ (no es polinomial!)

es racional

Sea $X \subset K^n$ algebraico

$K[X] = K_n / \mathcal{I}(X)$ anillo de coord. de X

- $K[X]$ es una K-algebra finit. generada (por $x_1, \dots, x_n$), sin nilpotentes $\neq 0$ (ya que $\mathcal{I}(X)$ es radical)

Recíprocamente

Prop Sea $K = \bar{K}$, A = K-alg. finit. gen. sin nilpotentes.

Entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ y $X \subset K^n$ / $A \cong K[X]$.

Dem Sean $a_1, \dots, a_n$ generadores de A

$\Rightarrow$ tengo epi. $K_n \xrightarrow{\alpha} A$

$x_i \mapsto a_i$

sea $I = \ker \alpha$, $X = \mathcal{V}(I)$

A sin nilp $\Rightarrow$ $I = \sqrt{I}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{I}(X) = I$

$\Rightarrow$ $K[X] = K_n / I \cong A$

Obs Dado A, los puntos de cada tal X (A = K-alg. $K = \bar{K}$) se obtienen por

$X = \{$ideales maximales de $A\} \cong \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(A, K)$

Volvemos a la correspondencia ($K = \bar{K}$)

$$\begin{array}{ccc} \{\text{ideales radicales}\} \subset K_n & \longleftrightarrow & \{\text{conjuntos algebraicos}\} \subset K^n \\ \cup & & \cup \\ \{\text{ideales primos}\} & \longleftrightarrow & \{\text{conj. alg. irreducibles}\} \\ \cup & & \cup \\ \{\text{ideales maximales}\} & \longleftrightarrow & \{\text{puntos de } K^n\} \\ (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) & & a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n \end{array}$$



En efecto, sea $M \subset K_n$ ideal maximal.

Por Hilbert, $V(M) \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \exists\, a \in K^n,\ a \in V(M) \Rightarrow M \subset \mathcal{I}(a) = (x_i - a_i)$

$\Rightarrow M = \mathcal{I}(a)$ ✓

Sea $X \subset K^n$ alg., $A = K[X] = K_n / \mathcal{I}(X)$

Entonces

$$\begin{array}{ccc} \{\text{ideales radicales}\} \subset A & \longleftrightarrow & \{\text{conj. alg.} \subset X\} \\ \cup & & \cup \\ \{\text{ideales primos}\} \subset A & \longleftrightarrow & \{\text{conj. alg. irred} \subset X\} \\ \cup & & \cup \\ \{\text{ideales maximales}\} \subset A & \longleftrightarrow & \{\text{puntos de } X\} \end{array}$$

~~GECALG 2000 / pg 1-14~~

$k_n = k[x_1, \dots, x_n]$

k ~~K~~ cuerpo (o anillo), $K_n = K[x_1, \dots, x_n]$

$S \subset K_n$, $V(S) = \{ x \in K^n \,/\, f(x) = 0, \ \forall f \in S \}$

conjunto algebraico en K^n

$V(S) = V(I)$, $I = \langle S \rangle$ ideal

Topología de Zariski en K^n. $\rightsquigarrow$ Topo. Zar en $X \subset K^n$.

Conjunto cuasi-algebraico: $V(I) - V(J)$

(intersección de abierto y cerrado)

Def $X \subset K^n$ cuasi-alg., $\varphi : X \to K$ función

φ es regular en $p \in X$ si $\exists\, a, b \in K_n$,

$\exists\, U$ entorno de p en X / $b \neq 0$ en U

$\varphi = \frac{a}{b}$ en U.

φ regular en X si φ regular en $p \in X$

$\forall p \in X$.

$\mathcal{O}(X)$ = anillo de funciones regulares $X \to K$.

Def $X \subset K^n$, $Y \subset K^m$ cuasi-alg. $\varphi : X \to Y$ función

φ es regular si $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, cada φ_i regular.

Composición de regulares es regular.

Categoría de conjuntos cuasi-alg.

Noción de isomorfismo.

Ej $X = K - \{0\}$, $Y = V(xy-1) \subset K^2$ son isomorfos.

Def Atlas en conjunto X:

Def Una **variedad algebraica** / k es un ~~sp. top.~~

X con un atlas $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ ($\mathcal{U}_i \subset X$ abierto)

$\varphi_i : \mathcal{U}_i \to N_i \subset k^{n_i}$ donde
- N_i es casi-alg.
- φ_i homeo.
- $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ regular $\forall i, j$

+ equivalencias de atlas.

Obs Atlas induce topología en X

Def X, I VA/k, $\varphi : X \to Y$ función continua

es regular si es localmente regular: ...

Composición de regulares es regular $\rightsquigarrow$ categoría.

Ej 1: variedades proyectivas / k

$\mathbb{P}^n(k) = k^{n+1} - \{0\} / k^*$

Sea $S \subset k[x_0, \dots, x_n]$ / cada $F \in S$ es homogéneo.

$X = \mathcal{V}(S) \subset \mathbb{P}^n(k)$ conjunto algebraico en $\mathbb{P}^n(k)$
Top. de Zar. en $\mathbb{P}^n(k)$

Conjunto casi-proyectivo: $\mathcal{V}(S) - \mathcal{V}(T)$

Cartas y atlas: $\mathcal{U}_i = (x_i \neq 0)$, $\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \mathbb{A}k^n$

Prop a) $\mathbb{P}^n(k)$ es una VA/k

b) Todo $X \subset \mathbb{P}^n(k)$ casi-proyectivo es una VA/k

Dem: Ejercicio.

Ej 2 $X = \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^m(k)$
polinomios bi-homogéneos
topología de Zariski
atlas

Obs / Notación $\varphi : X \to Y$ función regular de VA/k

$\rightsquigarrow$ $\varphi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ morfismo de anillos

$\varphi^*(\alpha) = \alpha \circ \varphi$

$X \longmapsto \mathcal{O}(X)$ functor covariante contra- $\{\text{VA}/k\} \to \{k\text{-algebras}\}$

Obs $X \subset K^n$ cuasi-alg. $K_n \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}(X)$ morfismo de anillos

$\mathcal{I}(X) = \ker \rho$ Def $A(X) = K_n / \mathcal{I}(X)$ $\bar{\rho} : A(X) \to \mathcal{O}(X)$

Def Sea X una VA/K.

Decimos que X es afín si $\exists\, X' \subset K^n$ conjunto algebraico y un iso $\varphi : X \to X'$.

Decimos que X es proyectiva si $\exists\, X' \subset \mathbb{P}^n(K)$ conj. alg. proyectivo y un iso $\varphi : X \to X'$.

Ej Abiertos principales son afines.

Obs Abiertos principales forman base de la topo. Zar. en X (X cuasi-alg.)
X VA/K

Def Sea X VA/K, $x \in X$.

Considero pares $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\mathcal{U} \ni x$, $\mathcal{U}$ abierto
$\varphi : \mathcal{U} \to K$ regular.

$$(\mathcal{U}, \varphi) \sim (\mathcal{V}, \psi) \iff \exists\, W \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V},\ x \in W$$
$$\varphi|_W = \psi|_W$$

$\mathcal{O}_{X,x} = \{(\mathcal{U}, \varphi)\} / \sim$ es anillo (local)

Para cada $\mathcal{U} \ni x$, $\mathcal{U}$ abierto tengo morfismo de anillos $\mathcal{O}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$

$$\varphi \longmapsto \varphi_x = \text{clase de } (\mathcal{U}, \varphi)$$

φ_x = "germen de φ en x"

Def: $X = X_1 \cup X_2$ cerrados $\Rightarrow X_1 = X$ o $X_2 = X$

irred $\Rightarrow$ conexo $\not\Leftarrow$ X

Def Sea X VA/K irreducible

($\forall\, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ abiertos $\neq \emptyset$ de X, es $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$)

Considero pares $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\mathcal{U}$ abierto $\neq \emptyset$

$\varphi : \mathcal{U} \to K$ regular.

$(\mathcal{U}, \varphi) \sim (\mathcal{V}, \psi) \iff \exists\, W \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V},\ W \neq \emptyset \ /\ \varphi|_W = \psi|_W$

$K(X) = \{(\mathcal{U}, \varphi)\}/\sim$

[Más general: $\mathcal{O}_{X,Y}$, $Y \subset X$ irreducible
$Y = X \rightsquigarrow K(X)$ (ejercicio)]

$K(X)$ es un cuerpo llamado cuerpo de funciones racionales de X.

Para $\alpha \in K(X)$, $\mathrm{dom}(\alpha) = \bigcup \mathcal{U}$ $(\mathcal{U}, \varphi) \in \alpha$

Def $\varphi : X \to Y$ regular, X, Y VA/K irreducibles

Decimos que φ es dominante si $\overline{\varphi(X)} = Y$

($\iff \forall\, \mathcal{U} \subset Y$ abierto $\neq \emptyset$, $\varphi^{-1}\mathcal{U} \subset X$ es abierto $\neq \emptyset$)

Entonces φ induce $\varphi^* : K(Y) \to K(X)$ morfismo de cuerpos.

Def X, Y VA/K irreducibles son birracionalmente equivalentes si $\exists\, \mathcal{U} \subset X$, $\mathcal{V} \subset Y$ abiertos y un iso $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$

($\overset{\text{Prop}}{\iff} K(X) \cong K(Y)$ iso de cuerpos)

$\Rightarrow$ ✓

$\Leftarrow$?

$K(X)$ X curva plana, grado de trascendencia

Ejs modelos de cuerpo K

Ej cuerpo de funciones meromorfas Λ-periódicas $\Lambda \subset \mathbb{C}$ lattice

Obs $\mathcal{U} \subset X$ abierto $\Rightarrow K(X) \cong K(\mathcal{U})$

(X irreducible)

Def Sea X VA/K irreducible.

$\dim X = \mathrm{gr\,trasc}_K\, K(X)$ curva algebraica $/K$

superficie algebraica $/K$

Obs $\dim X < \infty$

Recordar: $K \subset L$ cuerpos.

Elementos de L algebraicos sobre K / dependientes / indep. / K

Base de trascendencia: existen, todas tienen el mismo cardinal. Ref.: Lang, Zariski-Samuel.

Prop Si $\exists\ \varphi: X \to Y$ dominante entonces $\dim X \geq \dim Y$.

Dem $\varphi^*: K(Y) \hookrightarrow K(X)$

aditividad del grado de trascendencia:

$$\operatorname{gr.tr}_K K(X) = \operatorname{gr.tr}_{K(Y)} K(X) + \operatorname{gr.tr}_K K(Y) \quad \checkmark$$

Calculemos estas cosas en algunos casos:

Sea $X = K^n$. Tenemos morfismo natural

$$K_n \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}(K^n)$$

(pensar un polinomio $f \in K_n$ como inducido función $K^n \to K$)

Prop Si K es algebraicamente cerrado, ε es inyectiva.

Obs Falso en general. Si $K = \mathbb{R}$ la función

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$$

es regular y no es polinomial.

Estructura de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$? $\mathcal{O}(\mathbb{Q}^n)$?

Dem Sea $f: K^n \to K$ regular.

$\exists$ subconjunto abierto $K^n = \bigcup_{i \in I} U_i$ y polinomios $a_i, b_i \in K_n$ / $f = \frac{a_i}{b_i}$ en U_i, $b_i \neq 0$ en U_i

Puedo suponer $U_i = (f_i \neq 0)$ abierto principal.

Considero el ideal $I = \langle f_i \cdot b_i \rangle_{i \in I} \subset K_m$

Si $x \in U_i$, $(f_i \cdot b_i)(x) = f_i(x) \cdot b_i(x) \neq 0$

$\rightarrow V(I) = \emptyset \longrightarrow I = K_m$

Teo. de los ceros de Hilbert (después)

$\rightarrow 1 = \sum_{i \in I'} c_i \cdot f_i \cdot b_i$ $\quad I' \subset I$ finito.

$\rightarrow f = \sum c_i \cdot f_i \cdot b_i \cdot f = \sum c_i \cdot f_i \cdot a_i \in K_m$ ✓

$\rightarrow$ Es sobre. a mano ejercicio ✓

Sea $X \subset K^m$, $X = V(J)$ conjunto algebraico.

Def $K[X] = K_m / I(X)$ "anillo de coordenadas de X".

Obs Tenemos morfismo natural

$$K_m \longrightarrow \mathcal{O}(K^m) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$$
$$f \longmapsto f|_X$$

$\Rightarrow$ $K[X] \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}(X)$

Prop ($K = \overline{K}$) ε iso. (X conjunto algebraico)

Dem Similar al caso $X = K^m$. no vale para no-algebraicos

A anillo, $P \subset A$ ideal primo

$\rightsquigarrow A \rightarrow A_P$ localización $\quad A_P = \{ \frac{a}{b}, a \in A, b \notin P \}$

Prop $X \subset k^n$ conj. alg., $k = \bar{k}$, $x \in X$.

Tenemos
$$\begin{array}{ccc} k[X] & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{O}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[X]_{m_x} & \xrightarrow{\varepsilon_x} & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

m_x = ideal maximal de x

ε_x iso

Ejercicio.

Producto de VA/k. pág 130 — ver Ejercicios Adicionales

Pegado de VA/k

Prop $X \subset k^n$, $Y \subset k^m$ conjuntos algebraicos.

$f : k^n \longrightarrow k^m$ función polinomial

$f = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i \in k_n$

tal que $f(X) \subset Y$.

Entonces $f : X \longrightarrow Y$ es regular.

Tenemos
$$\begin{array}{ccc} k[Y] & \xrightarrow{f^*} & k[X] \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ \mathcal{O}(Y) & \xrightarrow[f^*]{} & \mathcal{O}(X) \end{array}$$

Si $k = \bar{k}$ vimos ε iso.

Si $k = \bar{k}$ todo $f : X \to Y$ regular es de esta forma (polinomial).

Todo morfismo de k-algebras $k[Y] \xrightarrow{\varphi} k[X]$ satisface $\varphi = f^*$ para una $f : X \to Y$ polinomial.

$X \cong Y \iff k[X] \cong k[Y] \iff \mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(Y)$.

Recordar:

$I \subset K_n$, $X = \mathcal{V}(I) \subset K^n$

$J = \mathcal{I}\mathcal{V}(I) \supset I$, $\mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I)$

Si $K = \overline{K}$, $J = \sqrt{I}$ (Hilbert)

Si $X \subset K^n$ subconjunto $\rightarrow$ $\mathcal{V}\mathcal{I}(X) = \overline{X}$

Todo $X \subset K^n$ conj. alg. se escribe de modo único como $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$, X_i irreducible

$X_i \not\subset X_j$, $i \neq j$

X irreducible $\Leftrightarrow$ $\mathcal{I}(X) \subset K_n$ primo.

$\left\{ \begin{array}{c} \text{ideales radicales} \\ I \subset K_n \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{conjuntos algebraicos} \\ X \subset K^n \end{array} \right\}$

$\Updownarrow$

$\{$ ideales primos $\} \longleftrightarrow \{$ conjuntos alg. irreducibles $\}$

$\Updownarrow$

$\{$ ideales maximales $\} \longleftrightarrow \{$ puntos de $K^n \}$

también ~~para~~ más en general

para X en lugar de K^n

$K[X]$ " K_n

También sale: $I \subset K_n$ ideal , $K = \overline{K}$

$I = \mathcal{I}(X) \Leftrightarrow I = \sqrt{I}$

algún $X \subset K^n$

Espacio tangente

$X = V(I) \subset k^n$ conj. alg. , $x \in X$.
(variedad - alg.)

Def

$$TX(x) = \{ y \in k^n \;/\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot y_i = 0 \quad , \forall f \in \mathcal{I}(X) \}$$

subespacio lineal de k^n.

Denotando $df(x) \in (k^n)^*$

$$df(x)(y) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot y_i$$

$$TX(x) = \bigcap_{f \in \mathcal{I}(X)} \ker df(x)$$

Obs Si $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ entonces

$$TX(x) = \bigcap_{i=1}^{r} \ker df_i(x)$$

Ver primero el caso $\mathcal{I}(X) = \langle f \rangle$
Def — punto singular en este caso.
$X = X_{n-1} \supset X_n \supset X_{n+1} = \emptyset$
$S(X) = X_n$

Def $d_X(x) = \dim_k TX(x)$

Obs $X_k = \{ x \in X \;/\; d_X(x) \geq k \}$

$$= \{ x \in X \;/\; \operatorname{rg}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right) \leq n - k \}$$

es un subconjunto algebraico de X
(anular menores $(n-k+1) \times (n-k+1)$)

$$X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} = \emptyset$$

Sup. X irreducible.

Def: $d_X = \min \{ d_X(x), x \in X \} = d$

$$\Rightarrow \quad X = X_d \supsetneq X_{d+1} \supseteq X_{d+2} \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} = \emptyset$$

Def Sea $x \in X$. Decimos que x es

punto regular de X si $d_X(x) = d_X$ $\quad X - \Delta(X)$

punto singular $\quad d_X(x) > d_X$ $\quad \Delta(X) = X_{d+1}$

Ej hipersuperficie, curva nodal, cuspidal

curvas singulares planas, multiplicidad, como tg.

Transformaciones cuadráticas.

Intersecciones completas. Segre. Veronese.

Variedades determinantales genéricas.

Producto de espacios proyectivos, polinomios multi-homo. $\mathrm{Grass}(r, K^n)$

Prop ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) $X \subset K^n$ conj. alg. irred.

Sea $U = X - \Delta(X)$ el abierto Zariski de puntos regulares de X. Entonces U tiene estructura natural de variedad analítica (real o compleja), en part., de var. $\mathcal{C}^\infty$, de $\dim_K = d_X$. Dem Usar Teo. Func. Implícita. Ejercicio. diferencial de función, regla cadena, fibrado tangente

---

Teo $X \subset K^n$ conj. alg. irred.

$\dim(X) = d_X = \dim \mathrm{Krull}(X)$

$K = \overline{K}$
$\mathrm{car}\, K = 0$

Entonces:

Definir $K(X)$
$\dim(X) = \mathrm{gr\,tr}_K\, K(X)$
pag 5

Recordar def. de grado de trascendencia

Recordar:

Def A anillo conmutativo

$\dim \mathrm{Krull}(A) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\ P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$
P_i ideal primo de $A\}$

Def X esp. top.

$\dim \mathrm{Krull}(X) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\ X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \cdots \supsetneq X_n$
$X_i \subset X$ cerrado irreducible$\}$

Derivada

Diferencial, fibrado tangente.

101 ~~14~~ ~~13~~ # 22

$X \subset K^n$, $Y \subset K^m$, $F: X \to Y$ regular ($\to$ polinomial)

$F = (F_1, \dots, F_m)$, $F_i \in K_n$

$F: K^n \to K^m$ $\quad F(X) \subset Y$.

~~Para $x \in X$~~, Para $x \in K^n$ denoto $dF(x): K^n \to K^m$ la transformación lineal con matriz $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)\right)$

Prop $\forall x \in X$, $dF(x)\,(TX(x)) \subseteq TY(F(x))$

Dem ejercicio.

Denoto $dF(x): TX(x) \to TY(F(x))$ lineal.

Regla de la cadena (functorialidad)

$$TX = \{(x,y) \in K^n \times K^n \,/\, x \in X,\ y \in TX(x)\}$$

$$= \{(x,y) \,/\, \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot y_i = 0,\ f(x) = 0,\ \forall f \in \mathcal{I}(X)\}$$

~~sub~~ conj. alg. en $K^n \times K^n = K^{2n}$.

Para $F: X \to Y$ como antes tengo

~~$dF: TX \to TY$~~ $\quad dF: K^n \times K^n \to K^n \times K^n$

$$(x,y) \longmapsto (F(x), dF(x) \cdot y)$$

aplicación polinomial, $dF(TX) \subseteq TY$

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "dF"] \arrow[d, "\pi_1"'] & TY \arrow[d, "\pi_1"] \\ X \arrow[r, "F"'] & Y \end{tikzcd}$$

(morfismo de fibrados vectoriales)

Extender a VAA/K ?

Espacio tg. Zariski de anillo local, de VA/K, morfismos. Iso con esp. tg. inmerso. (más adelante)

VOLVER a (10) y (5) $K(X)$

Teo $k=\bar{k}$, $\operatorname{car} k=0$, $X \subset k^n$ conj. alg. irred.

$\Rightarrow \dim \operatorname{tr}(X) = d_X = \dim \operatorname{Krull}(X)$

Primeros casos:

a) $X = k^n$ $\quad d_X = n$ claro

$\dim \operatorname{tr}(X) = n$ claro

$\dim \operatorname{Krull}(k^n) = n$ después.

b) $X = \mathcal{C}(f) \subset k^n$, $f \in k_m$ irreducible

$$\boxed{d_X = n-1} \Leftarrow \mathcal{C}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, f\right) \subsetneq \mathcal{C}(f)$$

Si vale $\Rightarrow$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{Y}\mathcal{C}(f) = (f) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i \cdot f$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $\forall i$ $\quad$ ($\operatorname{car} k = 0$) $f = cte \Rightarrow\Leftarrow$

($\operatorname{car} k = p$) $f = c + g^p = d^p + g^p = (d+g)^p \Rightarrow\Leftarrow$ f irred.

$\uparrow$ mirar grado en x_i $\quad\quad$ $\uparrow$ de

$$\boxed{\dim \operatorname{tr}(X) = n-1}$$

$k(X) = k[X]_0$ $\quad$ $k[X] = k_m/(f)$

$\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \in k[X]$, $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = 0$

son alg. dep.

Supp. x_m figura en f. Entonces $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}$ son alg. indep.

($g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}) = 0 \Rightarrow g \in \mathcal{Y}(X) = (f) \Rightarrow g = h \cdot f \Rightarrow\Leftarrow$)

$\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}$ base de trasc. de $k(X)/k$ ✓

$\dim \operatorname{Krull}(X) = n-1$ después.

~~Otra dem. de que dim $X = d_X$~~ :

[H], Prop (4.9)

Prop $X \subset K^n$ irreducible, $\dim X = r$. (car $k = 0$)

Entonces existe una hipersuperficie (irreducible)

$Y = V(f) \subset K^{r+1}$ y un iso. birracional

$\varphi : X \to Y$ (Obs En general, $\nexists\, \varphi$ iso)

Dem ⊙ Sea $y_1, \dots, y_r \in K(X)$ una base de trascendencia. $\Rightarrow$ $K(y_1, \dots, y_r) \subset K(X)$ algebraica (de tipo finito)

Sea y_{r+1} un elemento primitivo de esta extensión $\Rightarrow$ $K(X) = K(y_1, \dots, y_r)(y_{r+1})$ ~~$= K(y_1, \dots, y_r)[T]$~~

Sea f el polinomio minimal de y_{r+1} sobre $K(y_1, \dots, y_r)$.

$\Rightarrow K(X) = K(Y)$ donde $Y = V(f) \subset K^{r+1}$ ✓

$\boxed{d_X = \dim tr(X)}$:

Sean ⊙ $U \subset X$, $V \subset Y$ abiertos $\varphi : U \to V$ iso

$\Rightarrow d\varphi(x) : TX(x) \to TY(\varphi(x))$ iso, $x \in U$

$\Rightarrow d_X = d_Y$ Claro: $\dim tr(X) = \dim tr(Y)$ ya que $K_X \cong K_Y$

Por otra parte, $d_Y \overset{\text{pag 12}}{=} (r+1) - 1 = r = \dim tr(X)$

(o sea, la Prop. vale para una hipersuperficie)

$\Rightarrow d_X = r$ ✓ $\Rightarrow$ $\boxed{\dim tr(X) = d_X}$

⊙ Aquí uso [H], Cor. 4.5 (leerlo)

Discutir ejemplo de iso birracional

$\mathbb{A}^1$ α $\mathcal{O}$ (proyectar en el plano)

Def: $A \to B$ entera
Def: $f: X \to Y$ finito, $X \subset K^m$, $Y \subset K^n$

Queda demostrado el teor.

Uso para esto (y para otras cosas más adelante)

Prop (lema de normalización de Noether)

K cuerpo (infinito), $A = K$-alg. fin. gen.

$\exists\, y_1, \dots, y_r \in A$ /

$$\begin{array}{c} A \\ | \\ \text{entera} \\ | \\ K[y_1, \dots, y_r] \\ | \\ \text{trans. pura} \\ | \\ K \end{array}$$

Si $x_1, \dots, x_m$ generan A como K-alg.

puedo elegir los y_i como comb. lineal de los x_j.

Def $A = K[x_1, \dots, x_m]$

Sup. $x_1, \dots, x_r$ alg. indep. / K.

$x_{r+1}, \dots, x_m$ algebraicos sobre $K(x_1, \dots, x_r)$

Si $r = m$, ya está. Sup. $r < m$ y lema cierto para $m-1$ generadores.

Sea $x'_i = x_i - \lambda_i x_m$, $i = 1, \dots, m-1$

* Vamos a ver: $\exists\, \lambda_i$ / x_m es entero / $K[x'_1, \dots, x'_{m-1}]$

Por inducción, $\exists\, y_1, \dots, y_r \in K[x'_1, \dots, x'_{m-1}] \subset A$ alg. indep. tales que $K[y_1, \dots, y_r] \subset K[x'_1, \dots, x'_{m-1}]$ entero. +

$\Rightarrow K[y_1, \dots, y_r] \subset A$ entero ✓

* $x_1, \dots, x_m$ alg. dep. $\to \exists\, f$ / $f(x_1, \dots, x_m) = 0$

$f = f_r + \dots + f_d$ $\quad f_d \neq 0$

Sea $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ / $f_d(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, 1) \neq 0$ (K infinito)

Entonces $0 = f(x_1, \dots, x_m) = f(x'_1 + \lambda_1 x_m, \dots, x'_{m-1} + \lambda_{m-1} x_m, x_m)$

$= f_d(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, 1) \cdot x_m^d + \dots$ potencias inferiores en x_m ✓

Teo de los ceros de Hilbert (versión 1)

$k = \bar{k}$, $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$

$V(I) = \emptyset \iff I = (1)$

Dem Sup. $I \neq (1)$. Q.V.Q $V(I) \neq \emptyset$

Sea $M \supset I$ ideal maximal.

Basta con ver $V(M) \neq \emptyset$ $(V(M) \subset V(I))$

$A = k[x_1, \dots, x_n]/M$ k - alg. finit. gen.

$\Rightarrow$ Noether $\exists\, y_1, \dots, y_r \in A$ alg. indep., A entera sobre $k[y_1, \dots, y_r]$.

A cuerpo $\Rightarrow k[y_1, \dots, y_r]$ cuerpo (entera) $\Rightarrow r = 0$

$\Rightarrow k \xrightarrow{i} A$ extensión algebraica finita de cuerpos

$\Rightarrow i$ iso $\Rightarrow \forall i, \exists \alpha_i \in k$ / $x_i - \alpha_i \in M$

$k = \bar{k}$

$\Rightarrow \langle x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n \rangle \subset M \overset{\text{maximal}}{\Rightarrow} =$

$\Rightarrow \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V(M)$ ✓

Teo de los ceros (versión 2)

$\forall\, V(I) = \sqrt{I}$ $\forall\, I \subset k[x_1, \dots, x_n]$, $k = \bar{k}$

Dem Rabinowitz trick (ver Fulton)

Obs Versión geométrica de Noether.

$X \subset K^n$ conj. alg. irred.

$\exists\ f: K^n \longrightarrow K^r$ lineal / $f: X \longrightarrow K^r$ finito.

Prop $A \subset B$ entera $\Rightarrow$ $\dim$ Krull $A = \dim$ Krull B.

Dem Going-up. [A-M], Serre. (lo hago después)

Prop $X \subset K^n$ conj. alg. irred.

$\Rightarrow$ $\boxed{\dim_{tr} X = \dim \text{ Krull } X}$ ($\Rightarrow$ Teo.)

Dem $\dim$ Krull $K^n = \dim_{tr} K^n = n$. (*)

Uso Noether: $f: X \longrightarrow K^r$ finito

$A = K[X] \supset K[y_1, \dots, y_r] \Rightarrow K(X) \supset K(y_1, \dots, y_r)$ alg.

$\Rightarrow r = \text{rk}_{tr}\, K(X) = \dim X$

Prop $\rightarrow$ $\dim$ Krull $X = \dim$ Krull $K^r = r$

$\Rightarrow$ ✓

(*) ∃ demostración fácil? Sí: ver Hoja 16

∃ dem. en Serre.

($\dim A + 1 \leq \dim A[X] \leq 2\dim A + 1$

- todos los valores ocurren
- A noetheriano $\Rightarrow$ $\dim A[X] = \dim A + 1$)

Obs $(0) \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \cdots \subset (x_1, x_2, \dots, x_n) \subset K_n$

es cadena de ideales primos de long $= n$

$\Rightarrow$ $\dim$ Krull $K_n \geq n$

Vale: - esta cadena es maximal (fácil)

- todas las cadenas maximales tienen igual longitud (no es evidente) $\Rightarrow$ $\dim$ Krull $K_n = n$

Pero en p. 16 se demuestra de otro modo

$\boxed{\dim k[x_1,\dots,x_{n+1}] = n+1}$

$\boxed{\dim \text{Krull } k^n = n}$
(por inducción en n)

~~15~~ ~~12~~ ~~16~~ 27

Lo que es cierto es que $\dim A[x] = \dim A + 1$, si A es noetheriano. Es fácil ver que $\dim A[x] \geq \dim A + 1$, con lo cual, $\dim k[x_1,\dots,x_{n+1}] \geq n+1$; veamos la otra desigualdad, por inducción en n.

• también: $\exists$ esta cadena de primos $0 \subsetneq (x_1) \subsetneq (x_1,x_2) \subsetneq \dots \subsetneq (x_1,\dots,x_{n+1})$ $\Rightarrow \dim \geq n+1$ ✓

Sea $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_k$ $(P_0 = \{0\})$ una cadena de primos en $k[x_1,\dots,x_{n+1}]$. A probar: $k \leq n+1$

Sea $f \in P_1 - P_0$. Como $k[x_1,\dots,x_{n+1}]$ es un DFU y P_1 es primo, hay un factor irreducible de f que está en P_1; o sea, P_1 contiene un irreducible f_1. Haciendo un cambio de coordenadas, se puede suponer que f_1 es distinguido en la variable x_{n+1},

$$f_1 = x_{n+1}^r + a_1 \cdot x_{n+1}^{r-1} + \dots + a_r \quad , a_i \in k[x_1,\dots,x_n]$$

$$k[x_1,\dots,x_n] \xrightarrow{\psi} \frac{k[x_1,\dots,x_{n+1}]}{(f_1)}$$ es inyectiva pues un polinomio en $x_1,\dots,x_n$ no puede ser divisible por f_1, que contiene x_{n+1}.

27

Como $\frac{k[x_1,\dots,x_{n+1}]}{(f_1)} = k[x_1,\dots,x_n][\alpha]$ con $f_1(\alpha)=0$,

esta extensión es entera. Por lo tanto,

$$\dim_{\text{Krull}} k[x_1,\dots,x_n] = n = \dim_{\text{Krull}} \frac{k[x_1,\dots,x_{n+1}]}{(f_1)}$$

Pero si tiene en $k[x_1,\dots,x_{n+1}]$ la cadena de primos

$$P_0 \subsetneq (f_1) \subset P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \dots \subsetneq P_k$$

$\Rightarrow$ [illegible] $\quad 0 \subsetneq \pi((f_1)) \subset \pi(P_1) \subsetneq \pi(P_2) \subsetneq \dots \subsetneq \pi(P_k)$

es una cadena de primos en $\frac{k[x_1,\dots,x_{n+1}]}{(f_1)}$ [illegible]

Si $\pi((f_1)) = \pi(P_1)$ se deduce $k-1 \le n$

Si $\pi((f_1)) \subsetneq \pi(P_1)$ se deduce $k \le n$.

En todo caso, $k \le n+1$ #.

Caso $n=0$ sale porque $K[x]$ es principal $\Rightarrow \dim = 1$

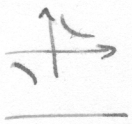
MORFISMOS ENTEROS

Def $A \xrightarrow{\alpha} B$ morfismo de anillos es entero si B es entero sobre $\alpha(A)$, o sea, todo $b \in B$ satisface $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i = 0$, $a_i \in \alpha(A)$, $a_n = 1$.

Def $X \xrightarrow{f} Y$ aplicación regular entre conjuntos afines $X \subset K^n$, $Y \subset K^m$. f es finito si $f^*: K[Y] \to K[X]$ es entero.

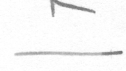
Def $X \xrightarrow{f} Y$ aplicación regular entre VAA/K. f es finito si $\exists$ cubrimiento abierto afín $Y = \bigcup_i Y_i$ tal que
- $f^{-1}(Y_i) = X_i$ es abierto afín
- $f: X_i \to Y_i$ es finito, $\forall i$.

Ej 1 $X = \mathcal{C}(xy-1) \subset K^2 \xrightarrow{\pi_1} Y = K$ no es finito.



Ej $X = \mathcal{C}(f) \subset K^{n+1}$ ↓ K^n f polinomio en x_{n+1} ⇒ finito

Ej 2 $X = \mathcal{C}(y^2 - x) \xrightarrow{\pi_1} K$ es finito



Ej 3 $f: K^2 \to K^2$ $f(x,y) = (xy, y)$ no es finita.

$u = xy = x \cdot v$, $v = y$ ⇒ $v \cdot x - u = 0$ (x no es entero)

Proposiciones básicas sobre morfismos enteros de anillos.

Sea $\alpha: A \to B$ un morfismo de anillos. Consideramos B como A-módulo.

① **Prop** Son equivalentes:

a) $x \in B$ es entero / A

b) $A[x] = A$-mód. generado por $\{x^n, (n \in \mathbb{N})\} \subset B$ es finitamente generado.

c) $\exists$ subanillo $C \subset B$ fin. gen. como A-mód / $A[x] \subset C$

d) $\exists$ $A[x]$-mód. fiel M, finit. generado.

② Cor x_i $(i=1,\dots,n) \in B$, entero $/A$.

$\Rightarrow$ $A[x_1,\dots,x_n]$ es A-mod. fin. gen.

Dem inducción en n.

③ Cor Sea $C = \{x \in B \,/\, x$ entero sobre $A\}$ (clausura entera de A en B)

Entonces C es subanillo de B.

Dem $x, y \in C \Rightarrow A[x,y]$ fin. gen. $\ni x.y,\ x+y$

Def Se dice que $A \subset B$ es ~~...~~ enteramente cerrado en B si $C = A$. Se dice que A es enteramente cerrado (= normal) si $A \subset K = A_0$ es enteramente cerrado.

(no lo necesito ahora)

④ Cor Son equivalentes

a) B es A-mod fin. gen.

b) B es A-alg. fin. gen y $A \xrightarrow{\alpha} B$ es entero.

⑤ Cor (transitividad) $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$

α, β enteros $\Rightarrow$ $\beta \circ \alpha$ entero.

⑥ Prop Sea $\alpha : A \to B$ entero (pensar p. ej. $A \subset B$)

a) Sea $I \subset B$ un ideal, sea $J = \alpha^{-1} I$ $(A \cap I)$

Entonces $\bar{\alpha} : A/_J \to B/_I$ es entero

b) Sea $S \subset A$ conjunto multiplicativamente cerrado $(A \subset B)$

Entonces $S^{-1}B$ es entero sobre $S^{-1}A$.

Dem: fácil

⑦ Cor $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo de variedades afines. Sup. f finito.

a) Sea $X_1 \subset X$ cerrado, $Y_1 = \overline{f(X_1)} \subset Y$.

Entonces $f_1 = f|_{X_1} : X_1 \to Y_1$ es finito.

b) $U \subset Y$ abierto $\Rightarrow$ $f^{-1}U \xrightarrow{f} U$ finito

Dem a) $X \xrightarrow{f} I \rightsquigarrow A = K[I] \xrightarrow{f^*} K[X] = B$. En general:

Si $X_1 \subset X$ corresponde al ideal $I \subset B$

entonces $\overline{f(X_1)} = I_1$ corresponde a $J = f^{*-1}(I)$ ✓.

O sea, $\mathcal{I}(\overline{f(X_1)}) = f^{*-1}\mathcal{I}(X_1)$. ✓

Ahora aplicar Prop 2, a).

b) Para un abierto principal $\mathcal{U} = I - \mathcal{C}(g)$

$K[\mathcal{U}] = K[I]_g = S^{-1}K[I] \xleftarrow{f^*} K[f^{-1}\mathcal{U}] = K[X]_g = S^{-1}K[X]$ ✓

Usar que $\mathcal{U}$ se cubre con abiertos principales.

(8) Prop Sea X una VAA/K.

a) Si $X_1 \subset X$ es cerrado, la inclusión $i: X_1 \to X$ es un morfismo finito

b) composición de morfismos finitos $X \to I \to Z$ es morfismo finito.

c) Sea $f: X \to I$ finito tal que $f(X) \subset I_1$ donde $I_1 \subset I$ es cerrado. Entonces la co-restricción $\tilde{f}: X \to I_1$ es finito.

d) Si $f_1: X_1 \to I_1$, $f_2: X_2 \to I_2$ son finitos entonces $f = f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \to I_1 \times I_2$ es finito.

Dem a) Supp. $X = \mathcal{C}(I) \subset K^n$, $K[X] = K_n/I$, $\mathcal{I}(X) = I$, $\mathcal{I}(X_1) = J \supset I$

$i^*: K[X_1] = K_n/J \twoheadrightarrow K[X] = K_n/I$ es sobreyectivo $\Rightarrow$ entero. (trivialmente)

b) Sale de (5)

c) Basta verlo en caso X, I afines. $\quad K[I] \xrightarrow{f^*} K[X]$

f^* entera $\Rightarrow \tilde{f}^*$ entera (claro) ✓ $\quad \downarrow \quad \nearrow \tilde{f}^*$

$K[I_1]$

(9) **Prop** Sea $f: X \to Y$ finito.

Entonces $f^{-1}(y) \subset X$ es un conjunto finito, $\forall y \in Y$.

Dem Podemos suponer X, Y afines, $X \subset K^n$, $Y \subset K^m$.

Sean $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in K[X]$ las funciones coordenadas.

$\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m \in K[Y]$ " "

Entonces cada $\bar{x}_i$ es entera sobre $K[Y]$:

$\exists\, r_i \in \mathbb{N}$, $\exists\, g_{ij}: Y \to K$ regulares /

$$(*)_i \qquad \sum_{j=0}^{r_i} f^*(g_{ij}) \cdot \bar{x}_i^j = 0 \in K[X] \qquad (\text{mónico})$$

$i = 1, \dots, n$

Sea $y \in Y$. Sea $x \in X$ / $f(x) = y$

Evaluando $(*)_i$ en x:

$$\sum_{j=0}^{r_i} g_{ij}(y)\, x_i^j = 0$$

$\Rightarrow$ x_i es raíz de $\sum_{j=0}^{r_i} g_{ij}(y)\, T^j \in K[T]$ (mónico)

$\Rightarrow$ x_i toma a lo sumo r_i valores

$\Rightarrow$ a lo sumo $r = \prod_i r_i$ posibilidades para $x \in f^{-1}(y)$. ✓

$\Rightarrow$ $f_j: f^{-1} Y_j \to Y_j$ es finito y dominante $\Rightarrow$ f_j [illegible] $\Rightarrow$ [illegible]

(10) Lema $A \subset B$ entera finita de anillos.

$I \subset A$ ideal propio $\Rightarrow$ $J = I.B \subset B$ ideal propio

Dem B es A-mód fin. gen: $B = A.b_1 + \cdots + A.b_n$

$I.B = B \Rightarrow b_i \in I.B \ \forall i \Rightarrow b_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j, \ i=1,\dots,n$

$\alpha_{ij} \in I$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} - \delta_{ij}) b_j = 0, \ \forall i \Rightarrow d.b_i = 0 \ \forall i$

$d = \det(\alpha_{ij} - \delta_{ij})$

$\Rightarrow d.B = 0 \Rightarrow d = 0$. Pero $d = 1 + e$, $e \in I$

$\Rightarrow 1 \in I \Rightarrow \Leftarrow$.

$A.b = 0 \Rightarrow A^*.A.b = 0$

$A^*.A = \det A . I$ $\quad A^* =$ adjunta

(11) Prop $f: X \to Y$ morfismo finito de VAA/K. (irreducibles)

$K = \bar{K}$

f dominante $\Rightarrow$ f sobreyectivo.

Dem Podemos suponer X, Y afines. $X \subset K^n$, $Y \subset K^m$.

Sea $y \in Y$, $y = (y_1, \dots, y_m)$. Quiero ver que $f^{-1}(y) \neq \emptyset$

o sea, $\exists$ solución $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ de $f_i(x) = y_i$, $i = 1, \dots, m$

$f = (f_1, \dots, f_m)$

$\Leftrightarrow$ el ideal maximal $M_x \subset K[X]$ satisface $M_x \supset f^* M_y$

Existe ideal max. $M \supset f^* M_y \Leftrightarrow f^* M_y = M_y . K[X] \subsetneq K[X]$

Esto ~~Allí~~ último se verifica debido a (10). ✓

Obs Si $X = \bigcup_{i=1}^{N} X_i$ es reducible y $f: X \to Y$ finito (Y irred) dominante

$\Rightarrow X_i \hookrightarrow X \xrightarrow{f_i} Y$ es finito $\forall i$. Y algún f_i es dominante.

$\Rightarrow f_i$ sobre $\Rightarrow f$ sobre. $\Rightarrow$ (11) también vale con X reducible.

Obs Si $Y = \bigcup_{j=1}^{M} Y_j$ es reducible y $f: X \to Y$ finito dominante

$\Rightarrow \tilde{f}_j : f^{-1} Y_j \to Y_j$ es finito y dominante $\Rightarrow \tilde{f}_j$ sobre $\forall j$ $\Rightarrow f$ sobre $\Rightarrow$ vale también

(12) Prop $f: X \to Y$ morfismo finito de VAA/K. ($K=\overline{K}$)
Entonces f es cerrada.

Dem ~~[illegible]~~ Sea $Z \subset X$ cerrado. Entonces $\tilde{f}: Z \to \overline{f(Z)}$ es finito dominante $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ sobre $\Rightarrow$ $f(Z) = \overline{f(Z)}$ ✓

(13) Prop (lema de normalización de Noether)
K cuerpo infinito, B = K-alg. fin. gen. $\Rightarrow$
$\exists\, b_1, \dots, b_r \in B$ alg. indep. / K /
B es entero / $A = K[b_1, \dots, b_r]$.

Si $y_1, \dots, y_n$ son generadores de B como K-alg. los b_i se pueden elegir como combinaciones lineales $b_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} y_j$, $i = 1, \dots, r$ con $\lambda_{ij} \in K$.

Dem hoja aparte

(14) Cor Sea $X \subset K^n$ conj. alg. (irred).
Entonces $\exists\, \lambda: K^n \to K^r$ lineal / $\lambda|_X : X \to K^r$ es morfismo finito. (Noether geométrico) (vale para λ genérica, comentar)

Nota: vale entonces para $\lambda: X \to K^r$ todo lo que vimos sobre morfismos finitos

(15) TEOREMA DEL ASCENSO (de [A-M])

(15.1) Prop $A \subset B$ íntegros, B entero / A.
B cuerpo $\Leftrightarrow$ A cuerpo.
Dem ... (usar relaciones de dependencia entera)

(15.2) Cor $A \subset B$ anillos, B entero / A
$Q \subset B$ primo, $P = Q \cap A$
Q maximal $\Leftrightarrow$ P maximal (falso en gral dar ejemplos) $A \subset K = A(0)$
Dem $A/P \subset B/Q$ íntegros, extensión entera, usar (15.1)

(15.3) Cor $A \subset B$ anillos, B entero/A

$Q \subset Q' \subset B$ primos / $Q \cap A = Q' \cap A = I$

Entonces $Q = Q'$.

Dem $A_I \subset B_I$ es entera.

Sean $M = I \cdot A_I$ (ideal max. de A_I)

$N = Q \cdot B_I \subset N' = Q' \cdot B_I$ (primos)

Tenemos $N \cap A_I = N' \cap A_I = M$

Por (15.2), N y N' son maximales en B_I

$\Rightarrow N = N' \Rightarrow Q = Q'$ ✓

Obs Falso sin la hipótesis entero

Ej: $K[x] \subset K[x,y]$, $I = (x)$

(15.4) Cor Sea $\phi : X \to Y$ morfismo finito dominante entre VAA/k irreducibles.

Sean $x_1' \subset x_1'' \subset X$ cerrados tales que $\phi(x_1) = \phi(x_1') \subset Y$

Entonces $x_1 = x_1'$.

Dem Se puede suponer x_1, Y afines.

$Q = \mathcal{I}(x_1) \subset Q' = \mathcal{I}(x_1') \subset B = K[X]$

$\phi(x_1) = \phi(x_1') \Rightarrow \overline{\phi(x_1)} = \overline{\phi(x_1')}$ (siempre no hace falta, son cerrados)

$\Rightarrow \mathcal{I}\left(\overline{\phi(x_1)}\right) = \mathcal{I}\left(\overline{\phi(x_1')}\right) \Rightarrow Q \cap A = Q' \cap A$, $A = K[Y]$

$\Rightarrow Q = Q' \Rightarrow x_1 = x_1'$ ✓

(15.5) Teorema $A \subset B$ anillos, B entero/A.

$\forall P \subset A$ primo, $\exists Q \subset B$ primo / $Q \cap A = I$.

Dem

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_I & \hookrightarrow & B_I \end{array}$$

B_I es entero sobre A_I.

Sea $N \subset B_I$ un ideal maximal (existe por tener)

$\Rightarrow M = N \cap A_I$ es maximal $\subset A_I$ (15.2)

$\Rightarrow N \cap A_I = I \cdot A_I$

Tomamos $Q = N \cap B$. Es primo y satisface $Q \cap A = I$.

(15.6) Teorema $A \subset B$ anillos, B entero / A.

Sea $P_1 \subset \cdots \subset P_n$ cadena de ideales primos en A,

$Q_1 \subset \cdots \subset Q_m$ $(m < n)$ cadena de primos en B

tales que $Q_i \cap A = P_i$, $\forall i \leq m$. Entonces la cadena de los P_i se puede extender a $Q_1 \subset \cdots \subset Q_n$ / $Q_i \cap A = P_i$ $\forall i \leq n$.

Dem Basta con encontrar Q_{m+1} (e iterar), o sea, basta con hacer el caso $m=1$, $n=2$: $Q_1 \subset ?$

$P_1 \subset P_2$

Sea $\bar{A} = A/P_1 \hookrightarrow \bar{B} = B/Q_1$ (dominios, extensión entera)

$\bar{P}_2 \subset \bar{A}$ primo $\overset{15.5}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\tilde{Q} \subset \bar{B}$ primo / $\tilde{Q} \cap \bar{A} = \bar{P}_2$

Tomar $Q_2 = \pi^{-1}(\tilde{Q}) \subset B$ ✓.

(15.7) Prop $A \subset B$ anillos, B entero / A.

Entonces $\dim \text{Krull } A = \dim \text{Krull } B$

Dem Tenemos una función

π: { cadenas de ideales primos en B } $\longrightarrow$ { cadenas de ideales primos en A }

$(Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n) \longmapsto (P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n)$, $P_i = Q_i \cap A$

(bien definida por 15.3).

π es inyectiva por 15.3 NO ES INYECTIVA

π es sobreyectiva por 15.6 y 15.3

π preserva la longitud de cadenas

vale: $\{n \in \mathbb{N} / \exists\, Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n \subset B\} = \{n \in \mathbb{N} / \exists\, P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n \subset A\}$ $\Rightarrow$ sup = sup

los dos conjuntos tienen el mismo sup de longitudes ✓

(16) Cor $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo finito dominante entre VAA/K irreducibles

Entonces $\dim \text{Krull}(X) = \dim \text{Krull}(Y)$

Dem Basta verlo para X, Y afines.

En ese caso tenemos $f^*: K[Y] \to K[X]$ entera

$\Rightarrow$ mismo dim Krull

15.7

(17) · Teo (Krull) Sea $X \subset K^n$ conj. alg. irreducible, $K = \bar{K}$. Sea $f \in K_n$, $f \notin \mathcal{I}(X)$.
Entonces toda componente irreducible de $X \cap \mathcal{C}(f)$ tiene dimensión $= \dim X - 1$. (Alg puede ser $X \cap \mathcal{C}(f) = \emptyset$)

Dem:

Sea $X \cap \mathcal{C}(f) = X_1 \cup \dots \cup X_N$ la descomposición en irreducibles.

Quiero ver que $\dim X_i = \dim X - 1$, $\forall i$. Lo hago para $i=1$.

Sea $\mathcal{U} = X - \bigcup_{i=2}^{N} X_i$ abierto $\neq \emptyset$ de X

$\Rightarrow$ $\mathcal{U} \cap \mathcal{C}(f) = \mathcal{U} \cap X_1$

Sea $V \subset \mathcal{U}$ abierto principal / $V \cap X_1 \neq \emptyset$

Reemplazando X por V (afín), puedo suponer $N=1$

Sup. entonces $X \cap \mathcal{C}(f) = X_1$ es irreducible.

Quiero ver: $\dim X_1 = \dim X - 1$.

Sea $g : X \to K^r$ finito, $r = \dim X$.

$g(X_1) \subset K^r$ es un cerrado.

Afirmo: $g(X_1) = \mathcal{C}(f_0)$ para un $f_0 \in K_r$ (*)

Entonces $\dim X_1 = \dim g(X_1) = \dim \mathcal{C}(f_0) = r-1$ ✓
(g finito)

(*): Puedo tomar $f_0 =$ norma de f :

Def Sea $K \subset L$ una extensión de cuerpos con $\dim_K L = n < \infty$. Para $\beta \in L$ sea $\tilde{\beta}: L \to L$

Denotamos $N_{L/K}(\beta) = \det \tilde{\beta} \in K$ $\qquad \tilde{\beta}(\gamma) = \beta \cdot \gamma$

Obs: $\widetilde{\beta_1 \cdot \beta_2} = \tilde{\beta_1} \circ \tilde{\beta_2} \Rightarrow N_{L/K}(\beta_1 \cdot \beta_2) = N_{L/K}(\beta_1) \cdot N_{L/K}(\beta_2)$

Obs Sea $\chi_\beta \in K[t]$ el polinomio característico de $\tilde{\beta}$

$$\chi_\beta(t) = \det(\tilde{\beta} + t \cdot id_L) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot t^i, \quad a_i \in K, \quad a_n = 1, \quad a_0 = N_{L/K}(\beta)$$

Cayley-Hamilton $\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \beta^i = 0$ $\qquad (\Rightarrow a_0 \in K \cap (\beta))$

Prop $A \subset B$ extensión entera de anillos íntegros, con cuerpos de fracciones $K \subset L$ (extensión algebraica finita)

$$\begin{array}{ccc} B & - & L \\ | & & | \\ A & - & K \end{array}$$

Sea $b \in B$ y sea $p(t) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i t^i \in K[t]$ el polinomio mínimo de $b \in L$ sobre K. Entonces cada $\alpha_i \in K$ es entero sobre A. En particular, si A es íntegramente cerrado, entonces $\alpha_i \in A$, $\forall i$,

Dem Sean $b = b_1, b_2, \dots, b_N$ los conjugados de b en una clausura normal de L. Entonces b_j es también entero / A. Como α_i es polinomio (simétrico) de los b_j, resulta α_i entero sobre A $\vdash$

Prop $\begin{array}{ccc} B & - & L \\ | & & | \\ A & - & K \end{array}$ como antes (A int. cerrado) 39

Sea $b \in B$ / $\sqrt{(b)} = P \subset B$ es primo. Sea $b_0 = N_{L/K}(b) \in A$

Entonces $P \cap A = \sqrt{(b_0)}$

(esto demuestra (*) pag. 31, tomando $A = K_R \subset K[X] = B$)

Dem Similarmente, si χ_b es el polin. característico de b, sus coeficientes $\in A$, $\chi_b(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i = 0 \Rightarrow a_0 = N_{L/K}(b) = -\sum_{i=1}^{n} a_i b^i =$

$\Rightarrow \sqrt{(b_0)} \subset P \cap A.$ $= b.(\ ) \in P \cap A.$

Sea $a \in P \cap A \Rightarrow a^m = b.c$, $c \in B \Rightarrow N(a^m) = N(b).N(c)$

$N(a) = a^n$ (siempre $a \in A$) $\qquad N(a)^m = N(b).N(c)$

$\Rightarrow a^{nm} \in (b_0) \Rightarrow a \in \sqrt{(b_0)}$ ✓ $\Rightarrow$ (*) pag. 37 QED.

(18) Cor $K = \bar{K}$, $X \subset K^n$ conj. alg. de $\dim = r$.

Sean $f_1, \dots, f_k \in K[n]$. Entonces todo comp. irred. de $X \cap \mathcal{C}(f_1, \dots, f_k)$ tiene $\dim \geq r-k$.

En particular, tomando $X = K^n$, todo comp. irred. de $\mathcal{C}(f_1, \dots, f_k)$ tiene $\dim \geq n-k$.

Dem Inducción en k. Usar (16) (17)

(19) Prop

Sean $X, Y \subset K^n$ irreducibles de $\dim d, e$

Todo comp. irred. de $X \cap Y$ tiene $\dim \geq d+e-n$

Sean $X, Y \subset \mathbb{P}^n(K)$ irred. de $\dim d, e$

Si $d+e-n \geq 0$ entonces $X \cap Y \neq \emptyset$

(y todo comp. irred. de $X \cap Y$ tiene $\dim \geq d+e-n$)

Dem $X \cap Y \cong (X \times Y) \cap \Delta$, Δ = diagonal $\subset K^n \times K^n$

$\Delta = \mathcal{C}(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$

Usar (18) ✓

(Reducción a la diagonal)

(20) Prop a) Sea $Y \subset K^m$ conj. alg. irred., $\dim Y = r$.

Entonces $\forall y \in Y$, $\exists U$ abierto $\neq \emptyset$ $U \ni y$

$\Rightarrow \exists g_1, \dots, g_r \in K_m$ / $\mathcal{C}(g_1, \dots, g_r) \cap U = \{y\}$

---

b) Más generalmente, sea $Z \subset Y$ cerrado irred. $\dim Z = s$

$\Rightarrow \exists U$ abierto $\neq \emptyset$, $\exists g_1, \dots, g_{r-s} \in K_m$ /

$\mathcal{C}(g_1, \dots, g_{r-s}) \cap U = Z \cap U$

Dem Elijo $g_1 \in K_m$ / $g_1(y) = 0$, $g_1 \in \mathcal{I}(Y)$ ($\{y\} \subsetneq Y$)

Sea $Y_1 = Y \cap \mathcal{C}(g_1) \Rightarrow \dim Y_1 = r-1$

$\exists g_2 \in K_m$ / $g_2(y) = 0$, $g_2 \notin \mathcal{I}(Y_1)$, sea $Y_2 = Y_1 \cap \mathcal{C}(g_2)$

$\Rightarrow \dim Y_2 = r-2$

$\Rightarrow \exists Y \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots \supset Y_r$ $\dim Y_i = r-i$

$\dim Y_r = 0 \Rightarrow Y_r$ conjunto finito $\ni y$, $Y_r = \{y, y_2, \dots, y_k\}$

Sea $h \in \mathcal{I}(y_i)$ $\forall i \neq 1$, $h \notin \mathcal{I}(y)$

Tomar $U = Y - \mathcal{C}(h)$, sirve ✓

(21) Prop (dim de fibras, caso 1)

$f: X \to Y$, $y \in Y$ f dominante

Entonces todo comp. irred. de $f^{-1}(y)$ tiene

dim $\geq$ dim f = dim X − dim Y

Sea $y \in U \subset Y$ como en (20)

$f^{-1}(y) \subset f^{-1}U$, puedo reemplazar Y por U,

X por $f^{-1}U$

$\{y\} = \mathcal{C}(g_1, \dots, g_r) \Rightarrow f^{-1}(y) = \mathcal{C}(f^*g_1, \dots, f^*g_r)$

(18) $\Rightarrow$ todo comp. irred. de $f^{-1}(y)$ tiene dim $\geq$ dim $X - r$

✓

$K = \overline{K}$, $X \subset \mathbb{P}^n(K)$ conj. alg. proyectivo de dim r.

Sean $F_1, \dots, F_k \in K[x_0, \dots, x_m]$ homogéneos, $k \leq r$.

Entonces $X \cap \mathcal{C}(F_1, \dots, F_k) \neq \emptyset \Rightarrow$ todas las componentes irreducibles tienen dim $\geq r-k$.

Dem Sea $\pi: K^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n(K)$ la proyección canónica.

Para $Z \subset \mathbb{P}^n(K)$ conj. alg. proyectivo denotamos

$\hat{Z} = \pi^{-1}(Z) \cup \{0\}$ = cerradura afín de $\pi^{-1}(Z)$

$\pi|_{\pi^{-1}(Z)} : \pi^{-1}Z \longrightarrow Z$ tiene fibras ($= K^*$) de dim $= 1$

$\Rightarrow \dim \hat{Z} = \dim \pi^{-1} Z = \dim Z + 1.$

$\hat{X} \cap \mathcal{C}(F_1, \dots, F_k) \neq \emptyset$ ya que contiene 0

si $Z = \overline{\mathcal{C}(S)}$
entonces $\hat{Z} = \mathcal{C}(S)$
(mismas ecuaciones)

$\Rightarrow$ toda comp. irred. de $\hat{X} \cap \mathcal{C}(F_1, \dots, F_k)$ tiene dim $\geq (r+1) - k \geq 1$

$\Rightarrow \hat{X} \cap \mathcal{C}(F_1, \dots, F_k) \supsetneq \{0\} \Rightarrow X \cap \overline{\mathcal{C}}(F_1, \dots, F_k) \neq \emptyset.$

Además, las comp. irred. de $X \cap \overline{\mathcal{C}}(F_1, \dots, F_k)$ corresponden a las de $\hat{X} \cap \mathcal{C}(F_1, \dots, F_k) \Rightarrow$ afirmación sobre la dim.
(dim disminuye en uno)

Quiero demostrar:

(23) Teorema (dimensión de las fibras)

Sea $f: X \to Y$ morfismo dominante de VAA/k.

Sup. X, Y irreducible, $r = \dim X - \dim Y$.

a) Sea $Z \subset Y$ cerrado irreducible,
sea W una comp. irred. de $f^{-1}Z$ que domina Z.
Entonces $\dim W \geq \dim Z + r$
(o sea, $\operatorname{codim}_X W \leq \operatorname{codim}_Y Z$)

b) Existe un abierto $\emptyset \neq U \subset Y$ tal que
- $U \subset f(X)$
- $\forall Z \subset Y$ cerrado irreducible / $Z \cap U \neq \emptyset$
$\forall W$ comp. irred. de $f^{-1}Z$ / $W \cap f^{-1}U \neq \emptyset \Rightarrow$ W domina Z
vale $\dim W = \dim Z + r$

Caso particular: Z = un punto, $Z = \{y\}$

a) Toda comp. irred. W de $f^{-1}(y)$ satisface
$\dim W \geq \dim X - \dim Y$. (lo vimos: (21))

b) $\exists U \subset Y$ / $\forall y \in U$ vale = $\forall W$ comp. de $f^{-1}(y)$.

La dem. de a) y de b) requieren ideas diferentes.

Vamos a hacer primero b) (sale fácil con lo que tenemos ya demostrado)

Sólo se necesita Noether para ambos.

Para a) se necesita Teo. de Krull

(24) Prop

Sea $f: X \to Y$ morfismo finito de VAA/K.

Sea $Z \subset Y$ cerrado irreducible.

Sea $W \subset X$ una componente irreducible de $f^{-1}Z$.

Entonces:

a) $\dim W \leq \dim Z$

b) Si W domina Z (o sea, $f(W) = Z$) entonces $\dim W = \dim Z$

c) Si f es dominante, existe W que domina Z. (W comp. de $f^{-1}Z$)

Dem Sea $Z_1 = f(W) \subset Z$

$f|: W \to Z_1$ es finito dominante entre variedades irreducibles

$\Rightarrow$ $\dim W = \dim Z_1 \leq \dim Z$ $\Rightarrow$ a)

b) W domina Z $\Rightarrow$ $Z_1 = Z$ $\Rightarrow$ $\dim W = \dim Z$ ✓

c) Sea $f^{-1}Z = \bigcup_{i=1}^{N} W_i$, comp. irred.

f sobre $\Rightarrow$ $f f^{-1} Z = Z$ $\Rightarrow \bigcup_i f(W_i) = Z$

$f(W_i) \subset Z$ son cerrados. Si todos fueran cerrados propios entonces Z no sería irreducible ✓

~~(18) Teo (dim de las fibras, a))~~

~~X, Y vaa irreducibles, $f: X \to Y$ dominante~~

(25)

(A) **Prop** (lema de Noether para anillos) 45 ~~21~~ ~~27~~

Sea $A \subset B$ extensión de anillos integros,

$B = A$-alg. fin. gen.

Entonces $\exists\, y_1, \dots, y_r \in B$ alg. indep. $/A$ (*)

y $\exists\, s \neq 0 \in A$ / $A(s)[y_1, \dots, y_r] \subset B(s)$ entero.

Dem $S = A - \{0\}$ conjunto multiplicativo.

$$K = S^{-1}A \hookrightarrow S^{-1}B$$

K es cuerpo, $S^{-1}B$ es K-alg. fin. gen.

Puedo aplicar Noether: $\exists\, y_1, \dots, y_r \in S^{-1}B$

alg. indep. $/K$ tales que $K[y_1, \dots, y_r] \subset S^{-1}B$ entero.

(puedo suponer $y_i \in B$)

Si $B = A[x_1, \dots, x_n]$, cada $x_i \in S^{-1}B$

satisface una ecuación sobre $K[y_1, \dots, y_r]$

$$x_i^{n_i} + \sum_{j=0}^{n_i - 1} P_{ij}(y_1, \dots, y_r)\, x_i^j = 0$$

Sea s = producto de los denominadores de los y_i y de los coefs de los P_{ij}

$s \in A$

$$s\, x_i^{n_i} + \sum_j Q_{ij}(y_1, \dots, y_r)\, x_i^j = 0$$

$Q_{ij} \in A[y_1, \dots, y_r]$ sirve ✓

(*) Además, si $x_1, \dots, x_n$ son generadores de B como A-alg. entonces los y_i se pueden tomar como combinaciones lineales de los x_j.

(26) Prop (Noether para anillos, versión geométrica)

Sea $f: X \to Y$ morfismo dominante de variedades afines irreducibles. Entonces $\exists\, V \subset Y$ abierto $\neq \emptyset$ y factorización

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}V & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle g}\searrow & & \uparrow{\scriptstyle \pi_1} \\ & V \times K^r & \end{array}$$

donde $r = \dim f = \dim X - \dim Y$

y g es finito.

Nota (26) dice que f es, salvo g finita, una proyección lineal.
Si f tiene derivada sobre $\neq$ todo punto, lo mismo pasa con g
$\Rightarrow g$ es étale
$\Rightarrow$ forma normal de f en la topología étale
"Teo. de rango de"

Dem. Resulta de (19) traduciendo.

(tomar $V = Y - f(\Delta)$)

(27) Dem. de (18) b):

- $V \subset f(X)$ ya que g y π_1 son sobre.
- Sea $Z \subset Y$ irreducible / $Z \cap V \neq \emptyset$.

Sea $W \subset X$ comp. irred. de $f^{-1}(Z)$ / $W \cap f^{-1}V \neq \emptyset$

W domina Z

Escribimos $\left.\begin{array}{l} Z_0 = Z \cap V \\ W_0 = W \cap f^{-1}V \end{array}\right\}$

$f_0 = f|_{f^{-1}V} : f^{-1}V \to V$

$\Rightarrow W_0$ es comp. irred. de $f_0^{-1}(Z_0)$ que domina Z_0.

$f_0^{-1}(Z_0) = g^{-1}\left(\pi_1^{-1}(Z_0)\right) = g^{-1}(Z_0 \times K^r)$

$Z_0 \times K^r$ es irreducible cerrado irred. de $V \times K^r$, de $\dim = \dim Z_0 + r$

$\left.\begin{array}{l} W_0 \text{ comp. irred de } g^{-1}(Z_0 \times K^r) \\ \text{que domina} \end{array}\right\}$

Aplicando (NA 24 b)) al morfismo finito g resulta $\dim W_0 = \dim Z_0 + r$ ✓

Aplicaciones del Teo sobre dimensiones

① Dim de variedades determinantales genéricas

② Rectas en superficies de $\mathbb{P}^3$. Generalizaciones.

③ Ver Ejercicios Adicionales

Voy a usar que $Grass(r, K^n)$ es VA/K

irreducible de dim $r.(n-r)$ (recordar atlas:

$Grass(r, K^n) = \{ S \subset K^n,\ S$ subespacio K-lineal de dim $= r \}$

(como conjuntos)

$\mathcal{U} = \{ a \in K^{r \times n} / \ rg(a) = r \}$ abierto Zar. de $K^{r \times n}$

$G = GL(r, K)$ actúa en $\mathcal{U}$ por mult. izq

$\mathcal{U}/G$ con la topo. cociente de la topo. Zar. en $\mathcal{U}$.

$$\mathcal{U} \xrightarrow{N} Grass(r, K^n)$$

$$a \longmapsto S = \text{subespacio generado por las filas de } a.$$

- $N(g.a) = N(a)$, $\forall g, \forall a$
- N sobre
- $N(a) = N(a') \Leftrightarrow \exists g / a' = g.a$

pasa al cociente

$$\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}/G \xrightarrow{\varphi} Grass(r, K^n)$$

φ es biyectiva, vía φ le damos topo. a $Grass(r, K^n)$.

Estructura de VA/K en $\mathcal{U}/G$ (σ en Grass, vía φ):

- abiertos del atlas: para $J \subset \{1, \dots, n\}$, $|J| = r$

y $a \in K^{r \times n}$ defino (J está ordenado)

$$a_J \in K^{r \times r} \qquad a_J = (a_{ij})_{1 \le i \le r,\ j \in J}$$

$$a_{J'} \in K^{r \times (n-r)} \qquad a_{J'} = (a_{ij})_{1 \le i \le r,\ j \notin J}$$

$\mathcal{U}_J = \{ a \in \mathcal{U} \,/\, \det a_J \neq 0 \}$

$\Rightarrow \mathcal{U} = \bigcup_J \mathcal{U}_J \qquad \bar{\mathcal{U}}_J = \mathcal{U}_J / G$

Obs para $a \in \mathcal{U}_J$, $a_J \in GL(r, K)$

- $\varphi_J : \mathcal{U}_J \longrightarrow K^{r \times (n-r)}$ (φ biyectiva)

$\varphi_J(a) = (a_J^{-1} \cdot a)_J$, (obs. $(a_J^{-1} \cdot a)_J = id$)

$\bar{\varphi}_J : \bar{\mathcal{U}}_J \longrightarrow K^{r \times (n-r)}$

Prop - $\{ (\bar{\mathcal{U}}_J, \bar{\varphi}_J) \}_J$ es un atlas en $\mathcal{U}/G$

- $\bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}/G$ es VA/K irreducible de dim $r(n-r)$

Dem ejercicio (Sug. hacer primero $r=1$, $r=2$)

$\bar{\varphi}_J \circ \bar{\varphi}_K^{-1}$ regular

(- $\pi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}/G$ es regular)

$\mathcal{U}/G$ es irreducible (porque $\mathcal{U}$ es irred. y π es cont.

Además, $\bar{\mathcal{U}}$ es: - racional (ker. iso. a espacio afín)
ver

- no-singular (después)

- homogénea
(G actúa transitivamente)

① $\mathcal{Y} = \{(a,S) \mid a(S) = 0\} \subset K^{m\times m} \times \mathrm{Grass}(n-r, K^m)$

$\pi_1 \swarrow$ $\qquad$ $\searrow \pi_2$

$K^{m\times m}$ $\qquad$ Grass

- $\mathcal{Y}$ subvariedad algebraica
- Es claro que $D_r = \{a \in K^{m\times m} \mid \mathrm{rg}(a) \le r\}$
$= \pi_1(\mathcal{Y})$

- $\pi_2^{-1}(S) = \mathrm{Hom}_K(K^n/S, K^m) \cong \mathrm{Hom}(K^r, K^m)$.

todas las fibras de π_2 son irreducibles de dim $r\cdot m$

$\Rightarrow$ $\mathcal{Y}$ irreducible de dim

$r\cdot m + \dim \mathrm{Grass} = r\cdot m + (n-r)(m-(n-r))$

- $\mathcal{Y} \xrightarrow{\pi_1} D_r$ tiene fibras de dim $=0$

$\to \dim D_r = \dim \mathcal{Y}$. ✓

$\Rightarrow$ $\mathrm{codim}\, D_r = (m-r)\cdot(n-r)$

Prop $f = (f_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$, $f_{ij} \in K[x_1,\dots,x_N]$

$X_r = \{x \in K^N \mid \mathrm{rg}\, f(x) \le r\}$.

Entonces toda comp. irred. de X_r tiene dim $\ge N - (m-r)(n-r)$

Dem ...

② Rectas en superficies

50 ~~36~~ ~~37~~

$$\mathcal{Y} = \{ (L, S) \,/\, L \subset S \} \subset \mathrm{Grass}(1, \mathbb{P}^3) \times \mathbb{P}^{(d)}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathrm{Grass} & & \mathbb{P}^{(d)} \end{array}$$

$$\mathbb{P}^{(d)} \cong \mathbb{P}^{\binom{d+3}{3}-1}$$

- - -

$d \leq 2$, $d = 3$, $d \geq 4$

- 27 rectas ...

- conicas, twisted cubics, ...

Comentario: Teorema de Noether-Lefschetz.

- Generalización: $\mathbb{P}^k$'s en hipersuperficies de grado d en $\mathbb{P}^r$.

Determinar los casos de número finito de soluciones. Cuántas hay? (Porteous) clases de Chern.

Def Sea $f: X \to Y$ dominante

(X, Y VA/k irreducibles). Sup. $\dim X = \dim Y = n$

Entonces $f^*: k(Y) \hookrightarrow k(X)$ extensión algebraica

def $\deg(f) = [k(X) : k(Y)] = \dim_{k(Y)} k(X)$

Teo $f: X \to Y$ como más arriba.

Entonces $\exists\, \mathcal{U} \subset Y$ abierto $\neq \emptyset$ tal que

$$|f^{-1}(y)| = \deg(f), \quad \forall y \in \mathcal{U}.$$

Dem: después?

Otra idea de dem sencilla: vía Teo, elemento primitivo, reducir al caso $X \subset Y \times K$ hipersuperficie. En este caso tomar $\mathcal{U} = (\text{discriminante} \neq 0)$ que claramente sirve.

Intentar dem con $k = \mathbb{C}$: tomar $\mathcal{U}$ = abierto de valores regulares. Ver que $f^{-1}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ es un revestimiento. Entonces basta con ver que $\mathcal{U}$ es conexo. Esto sale de:

Prop X VA/$\mathbb{C}$ irreducible.

Entonces X es conexa (respecto a la topología fuerte)

Dem Shafarevich.

Pero también se puede hacer dem. algebraica del Teo.

Otra versión

Teo $f: X \to Y$ dominante finita (X, Y VA/k irreducibles)

a) Si $y \in Y$ es punto normal ($\mathcal{O}_{Y,y}$ integralmente cerrado) entonces $|f^{-1}(y)| \leq \deg(f)$

b) $\exists\, \mathcal{U} \subset Y$ abierto Z. / $|f^{-1}(y)| = \deg f$, $\forall y \in \mathcal{U}$.

(def de normal después)

Dem ⊛ Teo (de Shafarevich)

Podemos suponer X, Y afines

$$\begin{array}{ccc} X & & K(X) \\ f\downarrow & K[X] & \uparrow f^* \\ Y & f^*\uparrow & K(Y) \\ & K[Y] & \end{array}$$

a) Y normal $\to$ $K[Y]$ int. cerrado.
f finita $\to$ $K[X]$ es $K[Y]$-mod. fin. gen. $\Big\}$ $\Rightarrow$ argumento de antes

$\forall\, a \in K[X]$, el polinomio minimal (mónico) de $a \in K(X)$

sobre $K(Y)$ tiene coeficientes $\in K[Y]$

Sea $y \in Y$, $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Quiero ver: $m \leq n = \partial f$.

Sea $a \in K[X]$ / $a(x_i) \neq a(x_j)$, $\forall i, j$.

Denotamos $F \in K[Y][T]$ el polinomio minimal de a.

$$F(T) = \sum_{i=0}^{d} F_i . T^i \quad , \quad F_i \in K[Y], \quad d \leq n. \quad , \quad F(a) = \sum F_i . a^i = 0$$
$$F_d = 1$$

$$\bar{F}(T) = \sum_{i=0}^{d} F_i(y) . T^i \in K[T] \qquad \bar{F} = F_y$$

$$F(a) = \sum F_i . a^i = 0 \in K[X] \Rightarrow F(a)(x_j) = \sum F_i(y)\, a(x_j)^i = 0$$

$\Rightarrow$ $\bar{F}$ tiene m raíces distintas $a(x_1), \dots, a(x_m)$

$\Rightarrow$ $m \leq d \leq n$ ✓

~~Def $y \in Y$ es punto de ramificación de $f: X \to Y$ (finita dom.) si $|f^{-1}(y)| < \partial f$. Denotamos $R(f) \subset Y$ los puntos de ramificación.~~

~~b) Quiero ver: $R(f)$ es cerrado propio, o sea, $Y \setminus R(f)$ es abierto ($\neq \emptyset$)~~

b) Veamos primero un importante

Ejemplo: Sea I variedad afín, $A = k[I]$

Sea $F \in A[T]$, $F = \sum_{i=0}^{d} F_i \cdot T^i$

Sea $X = \mathcal{C}(F) \subset I \times k$ y $f = \pi_1|_X : X \to I$

Si $F_d = 1$ entonces $f : X \to I$ es finito

Sea $\Delta \in A$ el discriminante de F.

Es claro que

$$f^{-1}(y) = \{ (y, t) \;/\; F_y(t) = 0 \}$$

donde $F_y(T) = \sum_{i=0}^{d} F_i(y) \cdot T^i \in k[T]$

$\Rightarrow$ $|f^{-1}(y)| \leq d$, $\forall\, y \in I$

$= d$, $\forall\, y \in I - \mathcal{C}(\Delta)$

Además, si $F \in A[T]$ es irreducible resulta $\Delta \neq 0$ y entonces el abierto $I - \mathcal{C}(\Delta)$ es propio.

Reducción del caso general al ejemplo:

$B = k[X]$ entera, $X \subset k^n$, $I \subset k^m$

$\updownarrow$ $x_1, \dots, x_n$ generan B como k-alg.

$A = k[I]$ $\Rightarrow$ " " $k(X)$ "

Existe $t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in k[X] \subset k(X)$ elemento primitivo de $k(X) / k(I)$ (supongo car $k = 0$)

$\Rightarrow$ $k(X) = k(I)(t)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $k[I][t] \subset k[X]$ es un subanillo con cuerpo de fracciones $k(X)$

~~Hip~~. Sea $F \in A[T]$ el polinomio mínimo de b. Entonces $A[b] = \frac{A[T]}{(F)}$

$\Rightarrow$ $A[b]$ es el anillo de coordenadas de

$X' = G(F) \subset I \times K$ (como en el ejemplo)

Además, el morfismo $X \xrightarrow{\alpha} X'$ (dominante) correspondiente a la inclusión $A[b] \subset B$ es birracional (pues $A[b]_0 = B_0 = K(X)$)

$\rightsquigarrow$ $A \subset A[b] \subset B$ corresponde a la factorización

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \subset I \times K \\ {\scriptstyle b}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle g = \pi_1|_{X'}} & \\ Y & & \end{array}$$

Es claro (por la definición para b resulta de lo visto en el Ejemplo).

En efecto:

Ej $X = \mathbb{P}^1 \xrightarrow{f} Y =$ cúbica racional

$f^{-1}(p) = \{1, -1\}$

Ej Grado de una variedad proyectiva.

$X \subset \mathbb{P}^r$, $\dim X = n$, X irreducible

$$gr(X) = |X \cap S| \quad , \quad S \subset \mathbb{P}^r$$
$$\dim S = r - n$$
S "general".

Precisamente:

$$Y = \{ (x, S) \in X \times Grass(r-n, \mathbb{P}^n) \ / \ x \in S \}$$

$\pi_1 \swarrow$ $\qquad$ $\searrow \pi_2$

X $\qquad$ Grass

$$\pi_1^{-1}(x) = \{ S \in Grass(r-n+1, K^{n+1}) \ / \ K.x \subset S \}$$
$$\cong Grass(r-n, K^{n+1}/K.x) \cong Grass(r-n, K^n)$$

tiene dim $(r-n).n$

$$\to \dim Y = (r-n).n + \dim X = (r-n).n + n$$
$$= (r-n+1).n$$

$$\dim Grass(r-n, \mathbb{P}^n) = \dim Grass(r-n+1, K^{n+1})$$
$$= (r-n+1).n \text{ , iguales!}$$

Como π_2 es sobre (ya que $S \cap X \neq \emptyset$ en $\mathbb{P}^n$)

le podemos aplicar el Teo a π_2

$$\Rightarrow \exists \ell \in Grass \ / \ |\pi_2^{-1}(S)| = \deg \pi_2 \ , \ \forall S \subset \ell$$
$$\Rightarrow \boxed{\deg(X) = \deg \pi_2}$$

Ejercicio

a) Si $X = V(F) \subset \mathbb{P}^2$, F irreducible (salida de cuadrados) de grado d

entonces $\deg X = d$.

b) Si $X = V(F_1, \dots, F_{2-n}) \subset \mathbb{P}^2$ intersección completa

$d_i = \deg F_i$ entonces $\deg X = \prod_{i=1}^{2-n} d_i$

c) Grado de variedad de Segre.

d) " " " Veronese.

e) " " determinantales genéricas (difícil)

Prop $f: X \to Y$ finito, X, Y no-singulares irreducibles $\dim X = \dim Y = n$

$S(f) = \{x \in X \mid \operatorname{rg} df(x) < n\} = \{x \in X \mid \det df(x) = 0\}$

(hipersuperficie en X) = puntos críticos de f

$f(S(f))$ = valores críticos de f. (es una hipersuperficie de Y)

$f^{-1}f(S(f)) = \tilde{S}(f)$, $U = Y - f(S(f))$, $f^{-1}U = X - \tilde{S}(f)$

$\tilde{f}: f^{-1}U \to U$ es finito y $d\tilde{f}(x)$ iso, $\forall x \in X$

(decimos que $\tilde{f}$ es étale)

Afirmo: $|\tilde{f}^{-1}(y)| = \partial f = \partial \tilde{f}$, $\forall y \in U$.

Dem Sup. $k = \mathbb{C}$. Por función implícita, $\tilde{f}$ es un recubrimiento finito (local es trivial $\mathbb{F}_n$, en la topología fuerte)

Como U es variedad irreducible / $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ U es conexo (Teo, acepto) (Topología fuerte)

$\Rightarrow |\tilde{f}^{-1}(y)| = \varphi(y)$ es constante en U.

Pero sabemos que en algún abierto Zariski $U' \subset U$

$\varphi(y) = \partial f$, $\forall y \in U' \Rightarrow \varphi(y) = \partial f$, $\forall y \in U$ ✓

Pregunta: Dem. válida sobre $k = \bar{k}$?
Dem. sin usar Teo (U conexo?)

Aplicación: Usando para ver b). Primera demostración Bezout geométrico:

Prop Sean $F_i \in K[x_0,\dots,x_n]_{d_i}$, $i=1,\dots,n$

Para F_i genéricos, $\tilde{\mathcal{C}}(F_1,\dots,F_n) \subset \mathbb{P}^n$ consiste de $d = \prod_{i=1}^{n} d_i$ puntos distintos.

Dem Sea $\mathcal{P} = \mathbb{P}S_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{P}S_{d_n}$ $\quad S_{d_i} := K[x_0,\dots,x_n]_{d_i}$

$$\mathcal{Y} = \{((F_1,\dots,F_n), x) \in \mathcal{P} \times \mathbb{P}^n,\ F_i(x)=0\ \forall i\}$$

$\pi_1 \swarrow \quad \searrow \pi_2$

$\mathcal{P} \qquad \mathbb{P}^n$

Calculando resulta $\mathcal{Y}$ irreducible, de $\dim = \dim \mathcal{P}$

$\exists\, \mathcal{U} \subset \mathcal{P}$ / $\pi_1^{-1}\mathcal{U} \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{U}$ es finito, de grado δ.

Para ver $\delta = d$ basta con calcular $|\pi_1^{-1}(p)|$ para $p=(F_1,\dots,F_n)$ algún p valor regular. (por la Prop.)

Tomo $F_i = \prod_{j=1}^{d_i} L_{ij}$, L_{ij} formas lineales genéricas

Afirmo: - p es valor regular
- $|\pi_1^{-1}(p)| = d$

} ejercicio.

Cor Deducir b) p. 43.

Comentario: grupo de Galois y grupo de monodromía.

X finito
$\beta \downarrow$ X, Y var/$\mathbb{C}$
Y irreducibles

1) $\exists\, \mathcal{U} \subset Y$ / $\beta^{-1}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ es recubrimiento

$\Rightarrow$ def M = grupo de monodromía

~~$M = \mathrm{im}(\pi_1(\mathcal{U}) \to \mathfrak{S}(\beta^{-1}$~~

$M = \mathrm{im}(\pi_1(\mathcal{U},y) \to \mathfrak{S}(\beta^{-1}(y)))$

2) $\mathbb{C}(X)$ extensión algebraica
$\uparrow \beta^*$ $\quad G$ = grupo de Galois.
$\mathbb{C}(Y)$

Teo: $G \cong M$

Ver Harris (Galois group of enumerative problems)
para demostración y aplicaciones.

$$F(y,t) = \sum_{i=0}^{d} F_i(y) \cdot t^i$$

$$X = \mathcal{C}(F) \subset I \times K \subset K^m \times K$$

$$dF(y,t) = \sum_{i=0}^{d-1} dF_i \cdot t^i + \left(\sum F_i \cdot i \cdot t^{i-1}\right) dt \quad , \quad dG_i(y)$$

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & Y \times K \\ \downarrow f = \pi_1|_X & & \\ Y & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} TX(y,t) & & \\ \downarrow df(y,t) & & \\ TY(y) & & \end{array}$$

$$TX(y,t)^* = TK^m \times TK \Big/ \bigcap \ker dG_i(y) \cap \bigcap \ker dF(y,t)$$

$$\uparrow df^* \qquad \uparrow$$

$$TY(y)^* = TK^m \Big/ \bigcap \ker dG_i(y)$$

$$\gamma(Y) = \langle G_i \rangle$$

Para $X = \mathcal{C}(F) \subset I \times K$

$\downarrow f$

Y

$F \in K[Y][T]$ mónico

$y \in Y$ valor crítico $\iff$

$\Delta_F(y) = 0$

Sea (y', t') / $\sum_{i=0}^{d-1} \ker t^i \cdot dF_i(y) \cdot y' + \left(\sum i\, t^{i-1} F_i(y)\right) \cdot t' = 0$

tal que $df(y,t)(y', t') = 0$ $\quad f$ es lineal $(f = \pi_1|_X)$

$\Rightarrow df(y,t) = \pi_1 \Rightarrow df(y,t)(y', t') = \pi_1 y' \Rightarrow y' = 0$

$\Rightarrow \left(\sum i\, t^{i-1} F_i(y)\right) y' = 0 \underset{y' \neq 0}{\Rightarrow} \sum i\, t^{i-1} F_i(y) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} F_y = 0 \quad (F_y(t) = F(y,t) = 0) \Rightarrow$ t es raíz multiple de F_y

$\Rightarrow \ker \Delta_F(y) = 0 \Rightarrow y \in \mathcal{C}(\Delta_F)$ $\quad \Leftarrow$ vale paso a paso

$\mathcal{Z}(I)$

Obs Para $X \subset \mathbb{A}^n_k$ vaa sobre $k \neq \overline{k}$ recorden que $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A(X), L) \cong \mathcal{Z}(I) \subset \mathbb{A}^n_L$

ξ = puntos de X con valores en L.

Como $T_{X,x} \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A(X)_x, k[\varepsilon])$

se puede pensar $T_{X,x}$ como los "puntos de X con valores en $k[\varepsilon]$"

Variedades propias. Eliminación.

Def X es propia si $\forall T$ la proyección $\pi: X \times T \to T$ es cerrada.

Def $f: X \to Y$ propia si $f \times 1: X \times T \to Y \times T$ cerrada $\forall T$.

Prop (1) X propia, $Z \subset X$ cerrado $\Rightarrow$ Z propia.

(2) X propia, $f: X \to Y$ morfismo
$\Rightarrow f(X)$ cerrado en Y

(3) Basta tomar $Y = \mathbb{A}^n$ $(\forall n)$ en la Def.

De (1) fácil.

(2) $X \xrightarrow[g = id \times f]{} X \times Y \xrightarrow[\pi]{} Y$

$g(X) = \Gamma_f$ = grafo de f cerrado en $X \times Y$

ya que $X \times Y \xrightarrow{f \times id} Y \times Y$

$\Gamma_f = (f \times id)^{-1}(\Delta_Y)$

$f(X) = \pi(\Gamma_f)$ cerrado (π cerrada)

(Sup. $\Delta_Y \subset Y \times Y$ cerrado, o sea, Y "separada")

Obs Para $X \subset \mathbb{A}^n_k$ $Z(I)$ vaca sobre $k \neq \bar{k}$ recordar que $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A(X), L) \cong Z(I) \subset \mathbb{A}^n_L$

ξ = puntos de X con valores en L.

Como $T_{X,x} \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A(X)_x, k[\varepsilon])$

se puede pensar $T_{X,x}$ como los "puntos de X con valores en $k[\varepsilon]$"

Variedades propias. Eliminación.

Def X es propia si $\forall T$ la proyección $\pi: X \times T \to T$ es cerrada.

Def $f: X \to Y$ propia si $f \times 1: X \times T \to Y \times T$ cerrada $\forall T$.

Prop (1) X propia, $Z \subset X$ cerrado $\Rightarrow$ Z propia.

(2) X propia, $f: X \to Y$ morfismo $\Rightarrow$ $f(X)$ cerrado en Y

(3) Basta tomar $Y = \mathbb{A}^n$ $(\forall n)$ en la Def.

Dem (1) fácil.

(2) $X \xrightarrow[g = id \times f]{} X \times Y \xrightarrow[\pi]{} Y$

$g(X) \overset{\Gamma_f}{=}$ grafo de f cerrado en $X \times Y$

ya que $X \times Y \xrightarrow{f \times id} Y \times Y$

$\Gamma_f = (f \times id)^{-1}(\Delta_Y)$

$f(X) = \pi(\Gamma_f)$ cerrado (π cerrada)

(Sup. $\Delta_Y \subset Y \times Y$ cerrado, o sea, Y "separada")

(3) $Y = \bigcup Y_i$ Y_i abierto afín, $Y_i \subset \mathbb{A}^{n_i}$

$Z \subset X \times Y$ cerrado

$X \times Y = \bigcup X \times Y_i \xrightarrow{\pi} Y = \bigcup Y_i$

$\pi(Z)$ cerrado $\iff \pi(Z) \cap Y_i$ cerrado en Y_i $\forall i$

$\iff \pi_i : X \times Y_i \to Y_i$ cerrada

$\pi_i(Z_i)$ cerrado $\quad (Z_i = Z \cap (X \times Y_i))$

$\to$ reducido al caso Y afín.

Sup. $Y \subset \mathbb{A}^n$.

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times \mathbb{A}^n & \xrightarrow[\bar{\pi}]{} & \mathbb{A}^n \end{array} \qquad Z \subset X \times Y \text{ cerrado}$$

$\Rightarrow Z \subset X \times \mathbb{A}^n$ cerrado $\Rightarrow \bar{\pi}(Z)$ cerrado en $\mathbb{A}^n$

($\bar{\pi}$ cerrada)

($Y \subset \mathbb{A}^n$ cerrado) $\Rightarrow \pi(Z) \subset Y$ cerrado.

Teorema $\mathbb{P}^n$ es propia. (Eliminación)

Dem Por (3), basta ver que $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^m$ es cerrada.

Sea $Z \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ cerrado $\Rightarrow$

$Z = Z(g_1, \dots, g_k)$ $\quad g_i = g_i(x, y)$ $\quad x = (x_0 : \cdots : x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_m)$

g_i homogéneos en x

$\pi(Z) = \{ y \in \mathbb{A}^m \;/\; \exists\, x \neq 0 \quad g_i(x, y) = 0 \;\; \forall i \}$

$M = (x_0, \dots, x_n) \subset k[x_0, \dots, x_n] = S$

$J \subset S$ ideal $\quad Z(J) = \emptyset$ en $\mathbb{P}^n$ $\iff J \supset M^s$ algún $s \in \mathbb{N}$

Cor $f : X \to Y$ propia $\Rightarrow f(X) \subset Y$ cerrado.

Obs (1) toda variedad algebraica X es cuasi-compacta

(2) X = esp. top separado Prop X compacto $\Leftrightarrow$ X propio ($X \times Y$ top producto)

(3) Entonces "propia" es una noción de compacidad válida sobre k

(4) $k = \mathbb{C}$ X propia $\Rightarrow$ (Zariski) $\Leftrightarrow$ X compacta (top. fuerte)

X quasi-proy.

$$\pi(Z) = \{ y \in \mathbb{A}^n \,/\, Z(g_i(-,y)) \neq \emptyset \} =$$

$$= \bigcap_{s \in \mathbb{N}} \underbrace{\{ y \in \mathbb{A}^n \,/\, \langle g_i(-,y) \rangle \not\supset M^s \}}_{\text{mostrar cerrado}}$$

paso "no constructivo"

$$S = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} M^s \qquad M^s = \text{formas de grado } s$$

d_i = deg en x de $g_i(x,y)$

$$\bigoplus_{d_i \leq s} M^{s-d_i} \xrightarrow{\Phi_y} M^s$$

$$\{f_\alpha(x)\} \longmapsto \sum f_\alpha(x)\, g_\alpha(x,y)$$

$\langle g_i(-,y) \rangle \supset M^s \Leftrightarrow \Phi_y$ sobre

$[\Phi_y]$ = matriz de Φ_y en bases de monomios

Φ_y no es sobre $\Leftrightarrow$ rango $<$ dim M^s

condición cerrada en coeficientes de $[\Phi_y]$

(que son polinomios en y) #

Cor sea X una variedad quasi-proyectiva.

X es proyectiva $\Leftrightarrow$ $\forall f: X \to Y$ $f(X)$ es cerrado.

Dem X proyectiva $\Rightarrow$ X propia (por Teo + Prop (1))

$\Rightarrow$ $f(X)$ cerrado (Prop (2))

Recíprocamente, si $X \subset \mathbb{P}^n$ es quasi-proyectiva la inclusión $i: X \to \mathbb{P}^n$ es tal que $i(X)$ cerrado $\to$ X es proyectiva.

~~[illegible]~~ Cor: Ver p. 50

Obs Para ciertos $Z \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ se pueden dar ecuaciones de $\pi(Z)$ explícitamente.

(1) $g_i(x,y)$ lineales en x

$$g_i(x,y) = \sum_{i=0}^{n} g_{ij}(y)\, x_i \qquad \pi(Z) = \{ y \,/\, \text{rango}(g_{ij}(y)) \leq n \}$$

(escribir ejemplo universal)

(2) $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^m$ $\quad Z = \{ f(x,y) = 0,\ g(x,y) = 0 \}$

$\pi(Z) = \{ \mathrm{Res}(f,g) = 0 \}$

<u>Resultante</u> A = anillo conmutativo (UFD)
$f, g \in A[x_0, x_1] = S$ homogeneos

<u>Prop</u> $f \in S_d$, $g \in S_e$

f y g tienen factor común de grado > 0
$\iff \exists f' \in S_{d-1},\ g' \in S_{e-1}$ tales que $f' \cdot g = g' \cdot f$

<u>Dem</u> si f, g tienen factor común $l \in S_1$
$\Rightarrow f = f' \cdot l$, $g = g' \cdot l \Rightarrow f'g = g'f$
Recíprocamente, sup. $(f,g) = 1$ y $f'g = g'f$
$\Rightarrow$ (UFD) $f' \mid f \Rightarrow \exists\, l \in S_1 \ / \ f = l f'$
$\Rightarrow l f' g = l g' f \Rightarrow g = l g' \Rightarrow \Leftarrow$

Consideremos $\Phi = \Phi_{f,g} : \underset{\dim\ d+e}{S_{d-1} \times S_{e-1}} \longrightarrow \underset{d+e}{S_{d+e-1}}$
$(f', g') \longmapsto g f' - f g'$

Prop $\Leftrightarrow$ f, g tienen factor comun $\iff \ker \Phi \neq 0 \iff \det \Phi = 0$

<u>Def</u> $\mathrm{Res}(f,g) = \det \Phi_{f,g}$ $\qquad g = \sum_{i=0}^{e} g_i\, x_0^{e-i} \cdot x_1^i$
$f = \sum f_i\, x_0^{d-i}\, x_1^i$

$\Phi(x_0^{d-1}, 0) = g \cdot x_0^{d-1} = \sum_{i=0}^{e} g_i\, x_0^{(d+e-1)-i}\, x_1^i$

$\Phi(x_0^{d-2} \cdot x_1, 0) = \sum_{i=0}^{e} g_i\, x_0^{d+e-2-i}\, x_1^{i+1}$

$$d \left\{ \begin{array}{cccccccc} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & g_2 & \cdots g_{e-1} & g_e & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & \cdots & & g_e & \\ & & & \ddots & & & & \end{array} \right.$$

matriz $(d+e) \times (d+e)$

$$e \left\{ \begin{array}{cccccccc} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_d & \cdots & 0 \\ 0 & f_0 & f_1 & \cdots & & f_d & 0 \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

Ejercicio. Escribir la condición para que f, g tengan ≥ 2 raíces comunes

($\ker \Phi \neq 0$ $\quad \Phi : S_{d-2} \times S_{e-2} \longrightarrow S_{d+e-2}$)

$\operatorname{rk} \Phi \leq d+e-2$

* Ejercicio $R = \{(f,g) \mid \operatorname{Res}(f,g) = 0\} \subset \mathbb{P}S_d \times \mathbb{P}S_e$ hipersuperficie

Describir $\operatorname{Sing} R$

Demostrar que R es racional

($\mathbb{P}S_{d-1} \times \mathbb{P}S_{e-1} \times \mathbb{P}S_1 \longrightarrow R$

$(f', g', \ell) \longmapsto (f'\cdot\ell, g'\ell)$)

Ejercicio $\pi : V - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}V$ $\quad v \in V$

$d\pi(v) : V \longrightarrow T_{\mathbb{P}V, \pi(v)}$ manda v a cero

induce iso $V/\langle v \rangle \longrightarrow T_{\mathbb{P}V, \pi(v)}$

Lema $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ $\quad X$ propia conexa

Lema $\left.\begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \\ Y \text{ afín} \\ X \text{ propia} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ constante

---

Rectas en superficies de $\mathbb{P}^3$

Lema $\left.\begin{array}{l} X \subset \mathbb{P}^n \text{ cerrado, } \dim X > 0 \\ H \subset \mathbb{P}^n \text{ hiperplano} \end{array}\right\} \Rightarrow X \cap H \neq \emptyset$

Dem $X \cap H = \emptyset \Rightarrow X \subset \mathbb{P}^n - H \cong \mathbb{K}^n \Rightarrow X = \text{punto} \Rightarrow\!\Leftarrow$ ($\dim X > 0$)

X propia

Ejemplos

$S = k[x_0, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$

1) $X \subset \mathbb{P}S_d$

polinomios reducibles

$\mathbb{P}S_e \times \mathbb{P}S_{d-e} \xrightarrow{p_e} \mathbb{P}S_d$

$(F, G) \longmapsto F \cdot G$ morfismo

$i - p_e$ cerrado

$X = \bigcup_{1 \leq e \leq d-1} i - p_e$ cerrado.

2) $X \subset \mathbb{P}^n$ $\quad p \in \mathbb{P}^n - X$

$C_p X = \bigcup_{x \in X} \overline{px}$ cerrado

Def $\quad I = \{(x, y) / x, y, p \text{ colineales}, x \in X, \dots\}$

cerrado en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$

(x, y, p colineales $\iff \operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_n \\ y_0 & \dots & y_n \\ p_0 & \dots & p_n \end{pmatrix} \leq 2$)

$C_p X = \pi(I)$ cerrado (propio?)

ecuaciones?

3) hipersuperficies singulares

$$I = \left\{ (F, x) / \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = 0 \right\} \subset \mathbb{P}(S_d) \times \mathbb{P}^n$$

$\mathbb{P}(S_d)$

$\pi(I)$ cerrado. (propio?)

Ej $d = 2$ $\det = 0$

Mas sobre espacio $\check{}$

① $X = Z(I) \subset \mathbb{P}^n$ I homogeneo.

$x \in X$

$$\overline{T}_{X,x} \underset{\text{def}}{=} \left\{ y \in \mathbb{P}^n \,/\, \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot y_i = 0 \quad \forall f \in I(X) \right\}$$

subvariedad lineal de $\mathbb{P}^n$, $\ni x$

(Euler: $d \cdot f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot x_i$ $\quad f \in S_d$)

$U_i = \{ x_i \neq 0 \}$ $\quad X_i = X \cap U_i$ (variedad afin)

Verificar

$$\overline{T}_{X,x} \cap U_i = T_{X_i,x} + x, \quad x \in U_i$$

② $v_d : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(S_d V)$ Veronese.

Verificar que $dv_d(x)$ es inyectivo $\forall\, x \in \mathbb{P}(V)$

Ejemplo (4): curva dual

$X = \{ F(x_0, x_1, x_2) = 0 \} \subset \mathbb{P}^2$ $\quad F \in S_d$

$$\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

$$(x_0, x_1, x_2) \longmapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)$$

$\varphi|_X$ sinfinito si X no singular.

$\varphi(X) \underset{\text{def}}{=} X^\vee$ cerrado

corresponde a "aplicación de Gauss"

$X \subset \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^{2\vee}$

$x \in X \quad x \mapsto \overline{T}_{X,x}$

Grado de $X^\vee = \#(L \cap X^\vee)$ $\quad L \subset \mathbb{P}^{2\vee}$

$=$ # de tangentes a X que pasan por un punto fijo $p \in \mathbb{P}^2 - X$

Polar para $p \in \mathbb{P}^2 - X$

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\, p_i \underset{\text{def}}{=} P_p F \qquad F \in S_d \Rightarrow P_p F \in S_{d-1}$$

$$p \in \overline{T}_{X,x} \iff x \in X \cap Z(P_p F)$$

$$\#\{x \,/\, p \in \overline{T}_{X,x}\} = \#\left(X \cap Z(P_p F)\right) = d(d-1)$$

(Bezout)

$$\Rightarrow \deg X^{\vee} = d(d-1)$$

Dimensión

X = variedad algebraica irreducible sobre k

$\dim X \underset{\text{def}}{=}$ grado de trascendencia de $k(X)$ sobre k

$X = \bigcup X_i$ comp. irreducibles

$\dim X = \max\{\dim X_i\}$

Ej - $\dim \mathbb{A}^n = \dim \mathbb{P}^n = n$

- $U \subset X$ abierto denso $\to \dim U = \dim X$

- $f \in S \to \dim Z(f) = n-1$ ($\subset \mathbb{A}^n$ o $\mathbb{P}^n$)

(**De** $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ sup x_n aparece

$A = S/(f) \subset K$ sup f irreducible

$\updownarrow$ | algebraica.

$k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}] \subset k(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$ alg. indep.

- $\dim X = 0 \iff X$ finito

De ($\Leftarrow$) $X = n$ puntos $\Rightarrow k(X) = k$

($\Rightarrow$) Sup X irreducible, $\dim X = 0$ $X \subset \mathbb{A}^n$

$\Rightarrow x_i =$ primera coordenada x_i algebraica / k

$\Rightarrow x_i$ toma solo finitos valores $\Rightarrow X \subset$ finito

Espacio tangente de Zariski

Prop X conj. alg. afín. / k

$A = k[X]$, $x \in X$, $M \subset A$ ideal maximal correspondiente a x.

$TX(x)$ esp. tg. de X en x

Entonces $M/M^2 \cong TX(x)^*$

Def $A \xrightarrow{d_x} TX(x)^*$

$f \longmapsto d_x(f)$

$d_x(M^2) = 0$ luego $(d_x|_M) = M^2$

$d_x|_M : M \longrightarrow TX(x)^*$

$M/M^2 \xrightarrow{d_x} TX(x)^*$ iso.

Cor $TX(x) \xrightarrow{d_x^*} (M/M^2)^*$ iso.

Cor $k[X] \longrightarrow k[X]_M$ localización en M

indece iso $M/M^2 \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$

$\Rightarrow TX(x)^* \cong \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$

---

29 : 1, 2, 3, 4

luego paso a pág. 38

A anillo, $I \subset A$ ideal

$A \supset I \supset I^2 \supset I^3 \supset \cdots$ filtración

$\rightarrow$ I^n/I^{n+1} A-modulo, $\forall n$

(como $I \cdot I^n/I^{n+1} = 0$, tiene estructura de A/I-modulo)

I/I^2 $\underset{\text{def.}}{=}$ módulo conormal de I.

$(I/I^2)^*$ $\underset{\text{def}}{=}$ módulo normal de I $\qquad (I/I^2)^* = \mathrm{Hom}_{A/I}(I/I^2, A/I)$

$= \{\varphi \in \mathrm{Hom}_A(I, A) \mid \varphi(I^2) = 0\}$

$A \xrightarrow{\varphi} B$ morfismo de anillos $\qquad =$

$I \subset A$, $I \subset B$ ideales.

Supg. $\varphi(I) \subset I$

$\Rightarrow \varphi(I^n) \subset I^n$ $\forall n$ $\rightarrow$ $I^n/I^{n+1} \longrightarrow I^n/I^{n+1}$

morfismo de A-mod. $\forall n$

Sea (A, M) anillo local. $A \supset M \supset M^2 \supset M^3 \cdots$

M/M^2 = espacio cotangente de Zariski de (A, M)

$(M/M^2)^*$ = " tangente "

$(A, M) \xrightarrow{\varphi} (B, N)$ morfismo de anillos locales

($\mid$ $A \xrightarrow{\varphi} B$ morfismo de anillos

tal que $\varphi(M) \subset N$

categoría de anillos locales

inducе

$M/M^2 \xrightarrow{\overline{\varphi}} N/N^2$

$(N/N^2)^* \xrightarrow{\varphi'} (M/M^2)^*$

necesito (?) suponer

$A/M \xrightarrow{\overline{\varphi}} B/N$ iso ?

Def $x \in X$ es un punto singular si

$$\dim T_{X,x} > \dim_x X$$

Ej $X = Z(f) \subset \mathbb{A}^n$ $\qquad \dim X = n-1$

$$T_{X,x} = \{ y \mid \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, y_i = 0 \}$$

$$\Rightarrow \dim T_{X,x} \geq n-1 \quad y \quad > n-1 \iff \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \ \forall i$$

En general, $I(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$

$$J_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) \qquad X \subset \mathbb{A}^n$$

$$\dim T_{X,x} = n - \operatorname{rg} J_x \geq \dim_x X$$

$x \in X$ singular si $\operatorname{rg} J_x < n - \dim_x X$

Prop $\operatorname{Sing} X$ es un cerrado propio de X

Dem $\operatorname{Sing} X = \{ x \mid \operatorname{rg} J_x \leq n - \dim_x X - 1 \}$ cerrado.

propio: mar Cor y el hecho que X es hipersuperficie.

Para hipersup. es fácil: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \ \forall i, \forall x$ no puede ser.

Formulación intrínseca

$X \subset \mathbb{A}^n$, $x \in X$ $\qquad M = \{ f \in A(X) \mid f(x) = 0 \}$

Para $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ se tiene la forma lineal $d_x f : k^n \to k$, que se puede restringir a $T_{X,x}$ $\quad d_x f : T_{X,x} \to k$

Por def. de $T_{X,x}$, $d_x f = 0$ si $f \in I(X)$

$\Rightarrow$ se tiene $d_x : A(X) \to T^*_{X,x}$

que puedo restringir a M

$$d_x : M \to T^*_{X,x}$$

Esta d_x es sobre ($l \in T^*_{X,x}$ se extiende linealmente $l : k^n \to k$)

- $\ker d_x = M^2$

Dem como $d_x(fg) = f(x)\, d_x g + g(x)\, d_x f$
resulta que $d_x(M^2) = 0$.
Recíprocamente, $d_x(f) = 0 : T_{X,x} \to k$
$\Rightarrow d_x(\tilde{f}) = \sum \lambda_i\, d_x(f_i)$ $\quad f_i \in I(X)$

$\Rightarrow d_x(f - \sum \lambda_i f_i) = 0$

$\Rightarrow \tilde{f} - \sum \lambda_i f_i \in (x_1, \dots, x_n)^2$

$\Rightarrow f \in M^2$

Cor $\quad M/M^2 \xrightarrow[\cong]{d_x} T^*_{X,x}$

$T_{X,x} \xrightarrow[\cong]{d_x^*} (M/M^2)^*$

Obs $\quad A(X) \xrightarrow{\text{tr}} A(X)_M = \mathcal{O}_{X,x}$ induce

$M/M^2 \xrightarrow{\cong} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ $\quad \mathfrak{m}$ = ideal max en $\mathcal{O}_{X,x}$

$\Rightarrow T_{X,x} \cong (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$

Def si X es una variedad algebraica abstracta y $x \in X$, con anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ y ideal maximal $\mathfrak{m}_x$, definimos

$$T_{X,x} = (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^* \quad \left(\begin{array}{c}\text{espacio} \\ \text{tangente de} \\ \text{Zariski}\end{array}\right)$$

Obs si $(A, \mathfrak{m})$ y $(B, \mathfrak{n})$ son anillos locales y $\varphi: A \to B$ un morfismo! ~~entonces~~ ~~tiene~~

$\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n} \Rightarrow \varphi(\mathfrak{m}^2) \subset \mathfrak{n}^2$

$\Rightarrow$ $\varphi: \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$

Si $f: X \to Y$ morfismo se tiene

$\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ $\quad y = f(x)$

que induce $d_x f: (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^* \to (\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2)^*$

Ejercicio Sea $X = Z(I) \subset \mathbb{A}^n$

Consideremos $TX = \{(x,y) \mid d_x f(y) = 0 \ \forall f \in I(X)\}$
$\subset X \times \mathbb{A}^n \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$

(TX es claramente una variedad afín)

y se tiene una proyección $TX \xrightarrow{\pi} X$

Por definición, $\pi^{-1}(x) = T_{X,x}$

(a) Demostrar: π es localmente trivial (es un espacio fibrado) $\Leftrightarrow$ X es no singular.

(b) Para X = var. alg. abstracta, construir TX pegando TX_i $\quad X = \bigcup X_i$ $\quad X_i$ afín.

Sing X = lugar donde salta dim $\pi^{-1}(x)$

Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local que es una k-algebra ($k = A/\mathfrak{m}$)
(o sea, $k \hookrightarrow A \to A/\mathfrak{m}$ es un iso.)

Def ej: A = anillo local de una variedad sobre k

Obs todo $a \in A$ se escribe de manera única $a = a_0 + m$ $a_0 \in k$, $m \in \mathfrak{m}$
Def $\mathcal{F}$: tomar a_0 = imagen inversa en k de la clase de a en $A/\mathfrak{m}$

tomar $m = a - a_0$.
! $k \cap \mathfrak{m} = 0$ ya que $k \to A/\mathfrak{m}$ iso.

Prop Se tienen isos canónicos (de k-espacios vectoriales)

$$(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^* \cong \mathrm{Der}_k(A, k) \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k[\varepsilon])$$

$$k[\varepsilon] = k[x]/(x^2) = \{a + b\varepsilon,\ a, b \in k,\ \varepsilon^2 = 0\}$$

Def $\varphi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, k[\varepsilon]) \to$

$\to \varphi(a) = \bar{a} + \varepsilon D(a)$ $\quad D \in \mathrm{Der}_k(A, k)$

$a \mapsto \bar{a}$ proyección canónica $A \to k$

$\mathrm{Der}_k(A, k) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$

$\mathcal{F}(D) = D|_{\mathfrak{m}}$ $\quad D$ derivación $\to D(\mathfrak{m}^2) = 0$

Recíproco $\mathcal{F}$ sobre: dado $\varphi : \mathfrak{m} \to k$ $\varphi(\mathfrak{m}^2) = 0$
como $A = k \oplus \mathfrak{m}$ como k-espacio vectorial,
extiendo $\tilde{\varphi} : A \to k$ a como $\tilde{\varphi}(1) = 0$
$\tilde{\varphi} \in \mathrm{Der}_k(A, k)$

Ej Espacios fibrados.

X variedad, $\{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X

F variedad

Consideramos familia de variedades $Y_i = U_i \times F$, $i \in I$

$V_{ij} \subset Y_i$ abierto, $V_{ij} = (U_i \cap U_j) \times F$

$\sigma_{ij} : V_{ij} \longrightarrow V_{ji}$ $\quad \sigma_{ij}(a,b) = (a, \tau_{ij}(a,b))$

donde $\tau_{ij} : (U_i \cap U_j) \times F \to F$

Ej circunferencia

Blow-up

① $0 = (0,\dots,0) \in K^n$

Definimos el "blow up de K^n en 0"

$x_1,\dots,x_n$ coordenadas en K^n

$y_1,\dots,y_n$ " " homogéneas en $\mathbb{P}^{n-1}(K)$

$$X = \{(x,y) \in K^n \times \mathbb{P}^{n-1} \;/\; x_i y_j = x_j y_i,\ \forall i \neq j\}$$

$$= \{(x,y) \in K^n \times \mathbb{P}^{n-1} \;/\; x \in y\}$$ (y es una recta en K^n)

$\pi_1 \swarrow$ $\quad \searrow \pi_2$

K^n $\qquad$ $\mathbb{P}^{n-1}$

$\pi_2^{-1}(y) = \{(x,y) \;/\; x \in y\} = y \times \{y\}$

Las fibras de π_2 son $\cong \mathbb{P}^1$

$\Rightarrow X$ es irreducible (Teo. de Shafarevich)

$\dim X = n-1+1 = n$

X "recta universal sobre $\mathbb{P}^{n-1}$"

$\pi_2 \downarrow$

$\pi_1^{-1}(0) = \mathbb{P}^{n-1} = \{\text{direcciones de } K^n\}$

$\pi_1^{-1}(x) = \text{un punto} = \{(x, K\cdot x)\}$, $x \neq 0$

X / $\pi_1 \downarrow$ / K^n

Afirmo: $X - \pi_1^{-1}(0) \xrightarrow{\pi_1} K^n - \{0\}$ iso

de: $x \longmapsto (x, K\cdot x)$ es la inversa (es regular)

Otra, sea $\pi: K^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ cociente

$\pi_1^{-1} = (id, \pi)$ $\quad \pi_1^{-1}(x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_n), (x_1 : \dots : x_n))$

Obs X es la clausura Zariski de $K^n \times \mathbb{P}^{n-1}$

del grafo de π en $(K^n - \{0\}) \times \mathbb{P}^{n-1}$

Sea $Y \subset K^n$, $0 \in Y$

Def $Bl_0(Y) =$ "blow-up de Y en 0"

$= \overline{\pi_1^{-1}(Y - \{0\})}$ (clausura en X, o en $K^n \times \mathbb{P}^{n-1}$)

Obs $\pi_1(Bl_0(Y)) = Y$

denotaremos $\pi_1 : Bl_0(Y) \longrightarrow Y$ la restricción

Ej $Y = \{y^2 = x^2(x+1)\} \subset K^2$

~~Ej~~ $Y = \{y^2 - x^3 = 0\} \subset K^2$

Blow-up de variedades proyectivas

1) $Bl_p(\mathbb{P}^n)$ $\quad p = (1 : 0 : \dots : 0)$ $\quad \mathbb{P}^n \quad x_0 : \dots : x_n$ $\quad \mathbb{P}^{n-1} \quad y_1 : \dots : y_n$

$X = \{(x, y) \mid x_i y_j - x_j y_i = 0 \ , \ 1 \le i, j \le n\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$

$\pi_1 \swarrow \quad \searrow \pi_2$

$\pi_1^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ $\quad \mathbb{P}^n$ $\quad \mathbb{P}^{n-1}$

$\mathbb{P}^n - \{p\} \xrightarrow{\pi_1^{-1}} X$

$(x_0 : \dots : x_n) \longmapsto ((x_0 : \dots : x_n), (x_1 : \dots : x_n))$

Más sobre blow-up:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ K^{n+1} & & \mathbb{P}^{n-1} \end{tikzcd}$$

También se denota $\mathcal{L} = Bl_0(K^{n+1})$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} = Bl_0(K^{n+1}) \arrow[d, "\pi"] \\ K^{n+1} \end{tikzcd} \qquad \pi = \pi_1$$

$\pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{P}^{n-1} =$ direcciones de K^{n+1}

$\pi^{-1}(x) = \{(x, K.x)\} =$ un punto, si $x \neq 0$.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(K^{n+1} - \{0\}) \arrow[d, "\pi"] \\ K^{n+1} - \{0\} \end{tikzcd}$$

es un iso (inversa: $\pi^{-1}(x) = (x, K.x)$)

$x \neq 0$

Sea $Y \subset K^n$, $0 \in Y$

Def $Bl_0(Y) = \overline{\pi^{-1}(Y - \{0\})}$ clausura en $K^n \times \mathbb{P}^{n-1}$

$\pi : Bl_0(Y) \longrightarrow Y$ la restricción de π.

Ej $Y = V(y^2 - x^2(x+1)) \subset K^2$



$Y = V(y^2 - x^3) \subset K^2$



Blow-up de variedades proyectivas

$Bl_p(\mathbb{P}^n)$, $p = (1 : 0 : \dots : 0)$

$$X = \{(x,y) \mid x_i y_j - x_j y_i = 0,\ 1 \leq i,j \leq n\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

$x = (x_0 : \dots : x_n)$
$y = (y_1 : \dots : y_n)$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbb{P}^n & & \mathbb{P}^{n-1} \end{tikzcd}$$

$\pi_1^{-1}(p) = \mathbb{P}^{n-1}$

$\mathbb{P}^n - \{p\} \xrightarrow{\pi_1^{-1}} X \qquad (x_0 : \dots : x_n) \longmapsto ((x_0 : \dots : x_n), (x_1 : \dots : x_n))$

(... grafo de la proyección $\mathbb{P}^n - \{p\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$)

Para $I \subset \mathbb{P}^n$, $p \in I$ defino $Bl_p(I)$ como antes.

$Bl_p(I) \to I$ es morfismo birracional

Desingularización de variedades:

Dada X cualquiera (singular), se busca una X' lisa con un morfismo birracional $\rho: X' \to X$ tal que X' es no-singular.

Curvas: esto se puede hacer por medio de blow-ups. Ejemplos.

Zariski, Hironaka ($car = 0$)

$\exists$ def de blow-up más general:

X VA/k, $I \subset X$ subvariedad (irreducible)

$Bl_I(X)$ = blow-up de X a lo largo de I

es una VA con un morfismo

$$\rho: Bl_I(X) \to X$$

tal que

- $\rho^{-1}(I) \subset Bl_I(X)$ es un hipersuperficie
- $Bl_I(X) - \rho^{-1}(I) \xrightarrow{\rho} X - I$ iso.

(ver Shafarevich, Hartshorne)

Ej Conocemos una desingularización de las variedades determinantales lineales.

Anillos locales regulares, normales. Anillos de Dedekind.

Lema (Nakayama) [AM, 2.6]

A anillo (conmutativo)

R = radical de Jacobson de A

$= \bigcap$ maximals

I ideal, $I \subset R$.

M A-mod fin. gen.

Entonces $I \cdot M = M \Rightarrow M = 0$

Ej Si A anillo local con ideal max $\mathfrak{M}$

$\rightarrow R = \mathfrak{M}$.

Cor M, A como antes, $N \subset M$ sub-mod.

I

$$IM + N = M \Rightarrow M = N$$

Dem Lema a M/N.

Cor Sea $(A, \mathfrak{M})$ local, $k = A/\mathfrak{M}$

Sea M A-mod fin. gen. ($\Rightarrow M/\mathfrak{M}M$ es k-esp. vect de dim $< \infty$)

Si $x_1, \dots, x_m \in M$ son tales que $\bar{x}_i \in M/\mathfrak{M}M$

generan $M/\mathfrak{M} \cdot M$ entonces los x_i generan M.

Dem $N = \langle x_1, \dots, x_m \rangle \subset M$

Def Sea $(A, \mathfrak{M})$ anillo local.

Un **sistema de parámetros** es una familia $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{M}$ tales que $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = I$ satisface $\sqrt{I} = \mathfrak{M}$.

Def $\delta(A) = \min \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists\, x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{M} \}$
sist. de par.

Prop $\delta(A) \leq \dim_k \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$

Dem Sea $s = \dim_k \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$, sea $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s$ base

$\Rightarrow$ Nak $x_1, \dots, x_s$ generan $\mathfrak{M}$ $\Rightarrow$ son sist. de par.

$\Rightarrow \delta(A) \leq s$ ✓

Obs Vale $\delta(A) = \dim(A)$ (Krull)

ver AM. (lo vimos en el caso geométrico:
$\exists g_1, \dots, g_n \in k[X] \mid V(g_1, \dots, g_n) = \{x\}$ en $\mathfrak{M} \ni x$)

Def $(A, \mathfrak{M})$ es anillo local regular si $\delta(A) = \dim_A \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$

(o sea, $\dim A = \dim(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2) = \dim(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2)^*$

esp. Tg. Zariski)

Ej $f \in K[x,y]$, $f(0,0) = 0$

$A = (K[x,y]/f)_{(x,y)}$ anillo local de curva plana.

- $\bar{x}, \bar{y}$ es sist. de par. otros. - $\dim A = 1$
- A regular $\iff$ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$
- $1 \leq \delta(A) \leq 2$ - $1 \leq \dim \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2 \leq 2$

Ej $\mathbb{Z}_{(p)} = \{ \frac{a}{b},\ p \nmid b \}$ $k = \mathbb{Z}_p$, **Ej** $A = K[\![x]\!]$
$A = K[\![x_1, \dots, x_n]\!]$

es regular de $\dim = 1$

CURVAS ALGEBRAICAS

① Anillos de Dedekind.

Teo Sea (A, M) un anillo local, $k = A/M$

Sup. A íntegro, noetheriano, $\dim A = 1$

Son equivalentes:

1) A es regular (o sea, $\dim_k M/M^2 = 1$)

2) A es DFU

3) A es integralmente cerrado

4) A es de valoración discreta

5) M es un ideal principal ($\exists x \in A$, $M = (x)$)

6) $\exists x \in M /$ Todo $a \in A$ se escribe $a = u \cdot x^r$ (de modo único) con $u \in A^*$, $r \in \mathbb{N}$.

7) Todo ideal $I \subset A$ es de la forma $I = M^r$, $r \in \mathbb{N}$.

Def K cuerpo, $v : K - \{0\} \to \mathbb{Z}$ función

Decimos que v es una valoración si

$v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$

$v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ $\quad (x+y \neq 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0)$

Obs $A = \{x \in K - \{0\} / v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$

es un subanillo de K.

A es local, con ideal maximal $\mathfrak{m} = (v > 0)$

Def (A, M) es un anillo de valoración discreta

si $\exists\, v : K - \{0\} \to \mathbb{Z}$ / $A = (v \geq 0)$

Def $A \subset B$, $b \in B$ es entero sobre A si ...,

Prop $C = \{b \in B / b \text{ entero} / A\}$ = clausura entera de A en B

es un subanillo de B. Dem AM Prop Cada clausura

Def A es **normal** en B si $C = A$

Def A es **normal** (= integralmente cerrado)

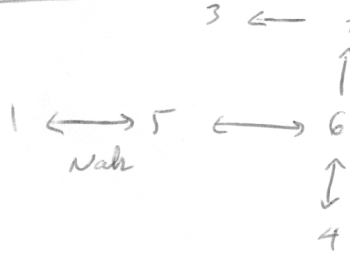
si A es normal en B = cuerpo de fracciones de A.

Prop A anillo íntegro.

A DFU $\Rightarrow$ A normal.

Dem ejercicio.

Ej $\mathbb{Z}$, $K[x_1, \dots, x_m]$ son DFU $\rightarrow$ normales.



(fáciles)

$3 \rightarrow 5$ (ver AM)

Implicaciones falsas en $\dim \geq 2$; para pensar

& (íntegro, noetheriano)

Def Sea A un anillo. Decimos que A es un anillo de **Dedekind** si $\dim A = 1$ y A es regular ($=_{def}$ A_M regular, $\forall M \subset A$ maximal)

Ej 1 $X \subset K^n$ conj. alg. irreducible

$A = K[X]$ es anillo de Dedekind si $\dim X = 1$ y X es no-singular

completaciones
- $K[[t]]$
- otros números p-ádicos

Ej 2 anillos de enteros algebraicos: sea $\mathbb{Q} \subset K$ una extensión de cuerpo finita (K es un cuerpo de números algebraicos)

Sea A = la clausura entera de $\mathbb{Z}$ en K

Entonces A es anillo de Dedekind.

($\dim A = \dim \mathbb{Z} = 1$; A es normal)

$A \subset K$

$| \quad |$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$v: A - \{0\} \to \mathbb{N}$

$v(a) = r \iff a \in m^r, a \notin m^{r+1}$

1) $v(a \cdot b) = v(a) + v(b)$

2) $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$

Def k cuerpo

$v: K - \{0\} \to \mathbb{Z}$ valuación

$\Rightarrow A = (v \geq 0)$ es un anillo local regular de $\dim = 1$.

82

340-7777

Aerolíneas

NDKL05

Prop (A, m) anillo local. Son equiv.: de $\dim = 1$ $k = A/m$

(1) A normal (def. después)

2) m principal

3) $\dim_k m/m^2 = 1$

4) A regular.

5) todo ideal de A es de la forma m^r.

Ej 1 $A = k[[t]]$

Ej 2 $A = k[t]_{(t)}$

Prop $U \subset X$ abierto, X curva no singular (irreducible)

$\forall\ f: U \to \mathbb{P}^n$ se extiende a X.

Def $\forall P \in X - U$, $f = (f_0 : \cdots : f_n)$, $f_i \in K(X)$

t parámetro de $\mathcal{O}_{X,P}$, $f_i = g_i \cdot t^{m_i}$, $g_i \in \mathcal{O}_{X,P}$, $m_i \in \mathbb{N}$ ...

Cor X, Y curvas no singulares proyectivas

X birat $Y \iff X$ iso Y.

$(\iff k(X) \cong k(Y))$

clasificación birac. $\dim$, iso.

Ej $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \supset \mathbb{P}^{n+m}$

Curvas singulares.

Desingularización.

Sea k un cuerpo, $k=\bar{k}$

Teo Existe correspondencia biyectiva (natural) entre (clases de iso)

a) Curvas algebraicas completas no singulares $/k$.
(= VAA$/k$, dim $=1$, completa, no-sing.)

b) (clases de iso de) curvas algebraicas proyectivas no singulares $/k$

c) (clases de iso de) cuerpos $k \hookrightarrow L$
tales que $\operatorname{gr\,tr}_k L = 1$

d) ($k=\mathbb{C}$) Superficies de Riemann compactas.

Dem a) $\to$ c) $X \longmapsto k(X)$ = cuerpo de funciones racionales.

b) $\to$ c) "

b) $\to$ a) Si X es curva proyectiva ($\subset \mathbb{P}^n$)
~~entonces~~ X es completa (Teo. eliminación)

a) $\to$ b) $\exists$ inmersión proyectiva (después)

c) $\to$ a) definir $X = \{$valuaciones de $L/k\}$

Ref. - Hartshorne.
- Mumford (curves and their Jacobians)

Discutir caso de cuerpos de números:
valuaciones arquimedianas y no-arquimedianas (finitas)

$\left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{array} \right)$

Sea $K = \bar{K}$, $K \subset L$, $\text{tr}_K(L) = 1$

(L = cuerpo de funciones en una variable / K)

Prop $\exists$ curva proyectiva X tal que $L = K(X)$

Dem Sea $x \in L$ un elemento trascendente / K. ⊛

$\Rightarrow$ L es extensión algebraica (de cierto grado d) de $K(x)$

Por el Teorema del elemento primitivo, existe $y \in L$ tal que $L = K(x)(y)$.

Sea f el polinomio de dependencia algebraica de y sobre $K(x)$, $f \in K(x)[t]$, $f(y) = 0$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{d} f_i \cdot t^i \quad , f_i \in K(x)$$

Puedo suponer $f_i \in K[x]$ (multiplico por denominadores)

$\Rightarrow$ $f(y) = \sum f_i(x)\, y^i = 0$ $\qquad g(x,y) = 0$

Sea $X = (g=0) \subset K^2$

Entonces $K(X) = K(x,y) = L$ ✓

Obs Decimos que la curva X es un modelo de L. Cualquier otra curva birracionalmente equivalente a X es un modelo de L. P. ej.: $\tilde{X}$ = clausura proyectiva de X

$\tilde{X}$ = desingularización de X

⊛ Obs cualquier elemento $x \in L - K$ es trascendente sobre K ya que $K = \bar{K}$

Teo Sea L como antes.

a) $\exists\ X$ curva proyectiva no-singular / $k(X) = L$

b) X es única salvo isomorfismo.

Dem 3 métodos de demostrar el a).

(construcción de modelo proyectivo (no-afín) no-singular).

1) Comenzamos por la curva plana $(f=0) \subset \mathbb{P}^2$ construida en la Prop. anterior. Sea $Y \subset \mathbb{P}^2$ su clausura proyectiva. Si Y es no-singular, ya está. Si Y es singular, construir una desingularización (vía transf. de Cremona + un blow-up o vía sucesivos blow-ups.). Faltaría ver que esto se puede hacer.

2) Normalización de variedades

Necesito aceptar Teo. de que la clausura entera es birracional. Normal $\Rightarrow$ regular en codim 1
Normalización de curva proyectiva es proyectiva (siempre!)

3) $\mathcal{C}_L = \{$valuaciones $v : L - \{0\} \to \mathbb{Z}\}$

Le damos a $\mathcal{C}_L$ la topología tal que los abiertos son los conjuntos finitos de $\mathcal{C}_L$.

Para $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}_L$ abierto, definimos:

$$\mathcal{O}(\mathcal{U}) = \bigcap_{v \in \mathcal{U}} A_v \qquad A_v = (v \geq 0) \cup \{0\}$$

$\mathcal{O}$ es un haz de anillos en $\mathcal{C}_L$

$(\mathcal{C}_L, \mathcal{O})$ es un espacio anillado. (de dim = 1, con cuerpo de funciones L)

Afirmación: es una variedad no singular, isomorfa a una curva proyectiva (ver Hartshorne) Chap. I, §

Clausura entera (y normalización)

Def $A \subset B$ (B íntegro)

$C = \{ b \in B \mid b$ es entero sobre $A \}$

subanillo de B = clausura entera de A en B.

Def A es normal en B si $C = A$.

Def A es normal (o integralmente cerrado)

si A es normal en $K = A_{(0)}$

Ej $\mathbb{Z}$ es normal. (DFU $\Rightarrow$ normal)

$k[x_1, \dots, x_n]$ "

Teo A = k-alg. fin. gen.

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ clausura normal de $\tilde{A}$

A en K es k-alg. fin. gen.

Def ~~[illegible]~~ Dada $X \subset \mathbb{A}^n$ con $A = k[X]$

en Y con $k[Y] = \widetilde{k[X]}$ se llama

"normalización de X".

Def X es normal si $k[X]$ es normal.

Prop local regular $\Rightarrow$ DFU $\Rightarrow$ normal.

?

Obs en dim $= 1$, normal $\Leftrightarrow$ regular

desingularização de curvas

$X \subset \mathbb{P}^n$ $\dim X = 1$

$\tilde{X} \xrightarrow{f} X$ normalização

$\tilde{X}$ é regular (é uma desingularização)

Prop desingularização é única.

Ex existência de isomorfismo.

Obs Falso em $\dim > 1$

---

curvas planas, blow-ups de curvas
redução a curva com singularidades ordinárias
transformações quadráticas.

S superfície não singular, $p \in S$.

$\beta: \hat{S} \to S$, $\beta^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$, $\beta: \hat{S} - \beta^{-1}(p) \to S - p$ iso.

Teo $C \subset S$ curva e superfície não singular.

$\exists$ única $S: S_N \xrightarrow{\beta_N} S_{N-1} \to \cdots \to S_1 \xrightarrow{\beta_1} S_0$ de blow-ups

$i = 1, \ldots, N$

$S_0 = S$

tal que φ a transformada própria de C

é não singular.

(De: Hartshorne cap V)

(ver também Walker, + ele-tal)

Prop:

Sea X una curva ~~proyectiva~~ no-singular / $k=\bar{k}$

Sea $f \in k(X)$ una función racional en X, $f \neq 0$.

Para cada $x \in X$ sea $v_x(f) \in \mathbb{Z}$

el orden de f en x

(ie $t \in M_x$ es parámetro local de $\mathcal{O}_{X,x}$

$f = u \cdot t^r$, $u \in \mathcal{O}_{X,x}^*$, $r = v_x(f)$)

$\mathcal{O}_{X,x} \subset k(X)$

$C(f) = \{ x \in X \;/\; v_x(f) > 0 \}$

$P(f) = \{ x \in X \;/\; v_x(f) < 0 \}$

Entonces $C(f)$, $P(f)$ son conjuntos finitos.

Dem Como $P(f) = C(\frac{1}{f})$, basta con demostrar que $C(f)$ es finito.

$f: X - P(f) \to k$ es una función regular

$C(f) = f^{-1}(0)$ es un cerrado $\Rightarrow$ finito o ~~todo~~

Teo $\sum_{q \in X} e(q) = \deg f$ aprox pág 42

Divisores, divisor asociado a una función,

equivalencia lineal de divisores, $Cl(X) = Div(X)/\sim$

(grupo de clases de divisores) ~~clase de equivalencia de~~

$$D = \sum_{i=1}^{N} n_i \cdot x_i \quad , n_i \in \mathbb{Z}, \; x_i \in X$$

$$D = \sum_{x \in X} n_x \cdot x \qquad n_x = 0 \text{ salvo finitos } x \in X.$$

$\partial D = \sum n_i \in \mathbb{Z}$

Caso $Y = \mathbb{P}^1$

$\partial(f) = 0$

$\partial(f) = f^*(0 - \infty)$

$f: X \to Y$

$f^*(y) = \sum_{x \mapsto y} e_f(x) \cdot x \in Div(X)$

Teo. dice: $\partial f^*(y) = \deg f$, $\forall y \in Y$.

$f^*(D)$ para $D \in Div(Y)$.

$\partial f^*(D) = \deg f \cdot \partial D$

Curvas, fórmula de Hurwitz.

A anillo local regular de dim $= 1$

$A \supset \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \mathfrak{m}^3 \supset \cdots$

Para $f \in A$, $\exists!\, r \in \mathbb{N} \;/\; f \in \mathfrak{m}^r - \mathfrak{m}^{r+1}$

Denotamos $r = \mathrm{ord}_A(f) = \dim_{A/\mathfrak{m}} A/(f)$

Otra manera: como $\mathfrak{m}$ es principal, sea $\mathfrak{m} = (t)$ (t se llama un "parámetro")

$\Rightarrow f = u \cdot t^r \quad u \in A^*$ (también, $\mathrm{ord}_A(f) \in \mathbb{Z}$ para $f \in K(A)$)

(r no depende de t)

Def si X es una VAA/k de dim $X = 1$, no singular, para $f \in k(X)$ y $x \in X$ escribimos $\mathrm{ord}_x(f) = \mathrm{ord}_{\mathcal{O}_{X,x}}(f)$

Def Sea $\varphi: X \to Y$ morfismo de curvas regulares, $\varphi(x) = y$, $\varphi^*: \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$

Indice de ramificación de φ en x $= e(x) = e_\varphi(x)$

$\underset{\text{def}}{=} \mathrm{ord}_x(\varphi^*(t))$ t parámetro en $y \in Y$.

Vale decir, ~~$\varphi^*(\mathfrak{m}_y) \in \mathfrak{m}_x^r$~~

$\varphi^*(\mathfrak{m}_y) \cdot \mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x^r$

(O sea, si $e = \cancel{e_x(\varphi)}\, e(x)$
φ está dado localmente por $\varphi(z) = z^e$
(z parámetro en x))

Decimos que φ es ramificado en x
si $\cancel{e_x(\varphi)}\ e_\varphi(x) > 1 \iff d\varphi(x) = 0$ (x punto crítico)

Teo ~~Prop~~ ~~Ej~~ Si $\varphi : X \to Y$ tiene
grado d $(= [k(X) : k(Y)])$,
para todo $y \in Y$ vale

$$\sum_{\substack{\cancel{x \to y} \\ \varphi(x) = y}} e_\varphi(x) = d$$

(explicar $\sum e_i \cdot f_i = d$ para $A \hookrightarrow B$ anillos de Dedekind)

Sup. $k = \mathbb{C} \Rightarrow X$ tiene estructura
de espacio complejo de $\dim_{\mathbb{C}} = 1$
(superficie de Riemann)
Sup. X proyectiva ($\Rightarrow$ compacta)
($\Leftarrow$ también vale)

$\Rightarrow X$ es variedad topológica compacta
orientable $\Rightarrow \exists!\, g \in \mathbb{N} \,/\, X \sim T_g$
$g = g(X)$

COR $\varphi : X \to \mathbb{P}^1 = Y$

$\deg(\varphi) = \deg(\varphi)_0 - \deg(\varphi)_\infty$
$= d - d = 0$

DIVISORES PRINCIPALES
TIENEN GRADO CERO.

Despues (Hurwitz)

Versión más algebraica y general del Teo.

Def Sean $(A, \mathfrak{m})$, ~~$(B, \mathfrak{n})$~~ $(A', \mathfrak{m}')$ anillos locales y φ un morfismo: $\varphi : A \to A'$ de anillos
$\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}'$

φ induce $\bar{\varphi} : A/\mathfrak{m} \to A'/\mathfrak{m}'$ de cuerpos residuales

denotamos $f = f_\varphi = [A'/\mathfrak{m}' : A/\mathfrak{m}]$

Obs si A, A' tienen cuerpo residual k entonces $f = 1$.

Supp. A, A' son locales regulares de dim $= 1$

Como $\varphi(\mathfrak{m}) \subset A'$ es un ideal, $\exists!\ e \in \mathbb{N}$ /

$$\varphi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}'^{e}$$

(o sea, si $\mathfrak{m} = (x)$, $\mathfrak{m}' = (x')$ entonces $\varphi(x) = u \cdot x'^{e}$
$u \in (A')^*$.)

$e = e_\varphi$ = "índice de ramificación de φ".

Sea $\varphi : A \to B$ morfismo de anillos de Dedekind.
y sea $\mathfrak{m} \subset A$ ideal maximal (= primo)
Sean $\eta_1, \dots, \eta_r$ los ideales max. de B
tales que $\varphi^{-1}\eta_i = \mathfrak{m}$.

$A_\mathfrak{m} \xrightarrow{\varphi_i} B_{\eta_i}$ morfismo de anillos locales.

$e_i = e_{\varphi_i}$, $f_i = f_{\varphi_i}$

Teo Si φ es entero de grado d entonces

$$\sum_{i=1}^{r} e_i \cdot f_i = d, \quad \forall\, \mathfrak{m} \subset A \text{ maximal}.$$

Dem ver 43-2 (mismo argumento)

$\dim_{k(\eta_i)} B'_{\eta_i}/\mathfrak{m}B'_{\eta_i} = e_i$

$\Rightarrow \dim_{k(\mathfrak{m})} \cdot B'_{\eta_i}/\mathfrak{m}B'_{\eta_i} = e_i \cdot f$

Pa Teo

Sea $y \in N \subset Y$ un entorno abi- de 3.

$k[N] = A$

Sea $N = f^{-1}(N) \subset X$, $k[N] = B$

$$\begin{array}{ccc} & & k(X) \\ & B & \uparrow \\ \text{entera} & | & \\ & A & k(Y) \end{array}$$

B es la clausura entera de A en $k(X)$

Denotamos $M \subset A$ el ideal maximal de correspondiente a $y \in Y$. Sea $S = A - M$ conj. mult.

Considero $S^{-1}.B = B'$ (extensión entera)

$S^{-1}.A = A'$

$f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$, $M_i \subset B$ ideal max. de x_i.

$M_i \cap A = M$

$S^{-1}A$ es anillo local de ideal maximal M

$S^{-1}B$ " " semi-local, maximales $M_1, \dots, M_r$

$A' = S^{-1}A$ es anillo principal

$B' = S^{-1}B$ es A'-módulo fin. gen. (pues B es A-mód. fin. gen.)

B' no tiene torsión, pues $B' \subset k(X)$

$\Rightarrow$ B' es A'-módulo libre, su rango es $d = \dim_{k(Y)} k(X)$

pero $\operatorname{rg}_{A'}(B') = \dim_{k(Y)} (B' \otimes_{A'} k(Y)) = \operatorname{rg}_{k(Y)}(k(X))$

$\Rightarrow$ $B' \otimes_{A'} A'/M = B'/M.B'$ es espacio vectorial sobre $A'/M = k$ de dim $= d$.

(⊛ Atiyah-Macd. Teo. 8.7)

Pero $B'/M.B' \overset{⊛}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{r} B'_{M_i}/M.B'_{M_i}$ y $\dim_k B'_{M_i}/M.B'_{M_i} = e_f(x_i)$

ver Hartshorne pag. 138

X curva Def $\mathrm{Div}(X)$ grupo livre ordenado

$X \xrightarrow{F} Y$ $\mathrm{Div}(X) \underset{F^*}{\overset{F_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Div}(Y)$

$d = \partial F \Rightarrow$ (Teo 1.88) $\quad \partial(F^*(D)) = d \cdot \partial D$, $\forall D \in \mathrm{Div}(Y)$

$f \in k(X)$, $f \neq 0 \Rightarrow (f) = \sum_{x \in X} v_x(f) \cdot x \in \mathrm{Div}(X)$ (pg. 88)

Def $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$

$D \sim D' \Leftrightarrow D - D' = (f)$, $\exists f \in k(X)^*$

$\mathcal{P}$ = divisores principais $= \{(f), f \in k(X)^*\}$

subgrupo de $\mathrm{Div}(X)$: $(f) + (g) = (f \cdot g)$

$k(X)^* \to \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Cl}(X) \underset{\text{def}}{=} \mathrm{Div}(X)/\mathcal{P}$

$= \mathrm{Div}(X)/\sim$

F^* e F_* são compatíveis com $\sim$:

$\mathrm{Cl}(X) \underset{F_*^*}{\overset{F_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Cl}(Y)$

$F^*(f) = (F^*(f))$

$F_*(f) = (N_F(f))$ norma

Teo (fórmula de Hurwitz) $(k=\mathbb{C})$

$\varphi: X \to Y$ morfismo entre curvas proyectivas no singulares, $d = \deg(\varphi)$

$$\Rightarrow \quad 2g(X) - 2 = d\cdot(2g(Y)-2) + \rho \qquad \left(\begin{array}{l} g(X) = \\ \text{género} \\ \text{topológico} \end{array}\right)$$

donde $\rho = \sum_{x \in X} e(x) - 1$

Obs $e(x) > 1 \Leftrightarrow d\varphi(x) = 0$ o sea, x pto. crítico → forman un conjunto → finito → la $\sum_{x\in X}$ es finita

Dem Sea $R = \{x \in X \;/\; e(x) > 1\}$ (puntos de ramificación)

$$C = \varphi(R) = \text{puntos críticos.}$$

$$\varphi|_C : X - \varphi^{-1}(C) \to Y - C$$

es un recubrimiento topológico de grado d

(local: $U \times F \xrightarrow{\pi_2} U$, F finito, $|F| = d$, U = abierto)

Topo. Alg. $\Rightarrow$ χ triangulación

$$\chi(X - \varphi^{-1}(C)) = d\cdot\chi(Y - C)$$

$$\Rightarrow \quad \chi(X) - \chi(\varphi^{-1}(C)) = d\cdot[\chi(Y) - \chi(C)]$$

$$\Rightarrow \quad \chi(X) - |\varphi^{-1}(C)| = d\cdot[\chi(Y) - |C|]$$

$$\rho = \sum_{y\in Y}\sum_{x\to y} e(x) - 1 = \sum_{y\in C}\sum_{x\to y} e(x) - 1$$

$$= \sum_{y\in C} (d - |\varphi^{-1}(y)|) = d\cdot|C| - |\varphi^{-1}(C)|$$

$\Rightarrow$ fórmula

$$\chi(X) = 2 - 2g(X)$$

Obs ∃ Hurwitz sobre $k = \bar{k}$

Aplicación: cálculo del género de una curva plana $X = (F=0) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

X no singular de grado d.

$\Rightarrow g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

Idea: Sea $\varphi: X \to \mathbb{P}^1$ proyección desde $p \in \mathbb{P}^2 - X$ general
($p \notin$ bitangente ó tangente inflexionaria)

$\deg(\varphi) = d \quad s = d(d-1)$ (polaridad)

$g(\mathbb{P}^1) = 0 \Rightarrow$ ✓

---

curvas hiperelípticas: $\varphi: X \to \mathbb{P}^1 \quad d=2$

$\Rightarrow s = 2g+2$

desingularización de $y^2 = f(x) \quad \deg f = 2g+2$

Ejercicio: estudiar las singularidades en el ∞.

$|\mathrm{Aut}(X)| \leq 84(g-1) \quad g \geq 2 \quad$ (IV.2.5)

Klein: $x^3y + y^3z + z^3x = 0 \quad g=3, \ |G| = 168$

en realidad $G = GL(3, \mathbb{F}_2)$ (única)

Idea: considera $\pi: X \to X/G$

clasificación de subgrupos finitos de $SO(3,\mathbb{R})$
cuerpos platónicos.

Teoría de Galois de $\varphi: X \to Y$

~~[illegible]~~

Cor. de Hermite: $f: X \to Y$ sobre (X, Y no singulares, completas)
(i.e. $f \neq$ constante)

Prop $\omega \in \Omega^1(X)$ 1-forma en X (curva alg. completa)

(ω) = divisor de ceros y polos de ω

Entonces $\deg(\omega) = 2g-2$ $\qquad g = g_{top}(X)$

Dem

1) $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(X) \Rightarrow \deg(\omega_1) = \deg(\omega_2)$

dem $\omega_2 = f \cdot \omega_1 \quad f \in \mathbb{C}(X)$

$$\left.\begin{array}{l}(\omega_2) = (f) + (\omega_1) \\ \deg(f) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \checkmark$$

2) Prop vale para $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ✓ $\qquad \eta = d(x_1/x_0)$

$\deg(\eta) = -2$

3) Elijo una $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^1$ $\qquad \eta \in \Omega^1(\mathbb{P}^1)$

$\deg \varphi = d$

Sea $\omega = \varphi^*(\eta)$

Entonces vale "Hurwitz versión formas":

$$\deg(\omega) \doteq d \cdot \deg(\eta) + \rho \qquad \text{mismo } \rho \text{ que en Hurwitz}$$

$$\underset{2)}{=} d \cdot (2g(\mathbb{P}^1) - 2) + \rho$$

$$\underset{\text{Hurwitz}}{=} 2g(X) - 2 \Rightarrow \checkmark \qquad (\text{para } \omega_1 \Rightarrow \text{para } \omega)$$

• cálculo local

Def K_X = clase de equivalencia lineal (ω) para $\omega \in \Omega^1(X)$ 1-forma racional (cualquiera)

Cor ¿deducir Poincaré:
v campo de vectores en X
número de ceros de $v = 2-2g$

$X = \mathcal{C}(F) \subset \mathbb{P}^2$

$X_0 = \mathcal{C}(f) \quad f = F_*$

$\omega = \dfrac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ 1-forma racional

$\eta = g \cdot \omega \qquad g \in k[x,y]$

X_0 no-singular
$\Rightarrow \omega$ regular en X_0

Otra Dem. de fórmula del género:

$$\left.\begin{array}{l}- \deg(\omega) = 2g-2 \\ - \deg(\omega) = d \cdot (d-3)\end{array}\right\} \Rightarrow \checkmark$$

Dem Sea $w \in K_{\mathbb{I}}(\mathbb{I})$

Entonces $f^*w \in K_X(X)$

Tenemos $\partial K_{\mathbb{I}} = \partial(w)$

$\partial K_X = \partial(f^*w)$

Cuáles son los ceros de f^*w?

/ f^{-1}(ceros de w)

\ x_{ij}, donde f^*w se anula con multiplicidad $e_{ij}-1$

ya que $f^* dt_i = d f^* t_i = d\, u_{ij}^{e_{ij}} =$

$= e_{ij} \cdot u_{ij}^{e_{ij}-1} \cdot du_{ij}$

$\Rightarrow \quad (f^*w) = f^*(w) + R, \qquad R = \sum_{i,j} (e_{ij}-1)\, x_{ij}$

$i = 1, \dots, w$

$j = 1, \dots, n_i$

$\Rightarrow$ ~~$\partial K_X = \partial f^*$~~

$$\partial K_X = d \cdot \partial K_{\mathbb{I}} + \partial R$$

Como $\sum_j e_{ij} = d, \ \forall i$

$$\partial R = d \cdot w - \sum_{i=1}^{w} n_i = \rho$$

Ej si $n_i = 1 \ \forall i$ entonces $\rho = d \cdot w - w = w(d-1)$

Prop 3 (fórmula de Hurwitz, 2)

$f: X \to Y$ como antes, $k = \mathbb{C}$.

Então $\chi(X) = d \cdot \chi(Y) - s$

Dem Considerar $f: X \to Y$ $\rightsquigarrow$ $f_0 : X_0 \to Y_0$

$Y_0 = Y - \{y_1, \dots, y_w\}$, $X_0 = f^{-1}(Y_0) = X - \bigcup_{i,j} \{x_{ij}\}$

f_0 é um revestimento de grau d

$\Rightarrow \chi(X_0) = d \cdot \chi(Y_0)$

$\left.\begin{array}{l} \chi(X) = \chi(X_0) + \text{número de } x_{ij}\text{'s} \\ \chi(Y) = \chi(Y_0) + w \end{array}\right\} \Rightarrow$ ✓

Agora tome $Y = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e calcule: $g(Y) = 0$

$\Rightarrow \chi_Y = -2$

$f: X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

~~97~~ ~~96~~ 99

Notación Si $L \in \mathrm{Pic}(X)$, $D \in \mathrm{Div}(X)$

denotamos $L(D) = L \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$

Ej $L(-P)$, $L(-2P)$, ...

$L(-P) \hookrightarrow L$

$L(-P)(X) = \{ s \in L(X) \mid s(P) = 0 \}$

Notación Para $L \in \mathrm{Pic}(X)$

$$\ell(L) = \dim_k L(X)$$

Para $D \in \mathrm{Div}(X)$

$$\ell(D) = \dim_k \mathcal{O}_X(D)(X)$$

Def $D \in \mathrm{Div}(X)$

$L(D) = \{ f \in k(X), f \neq 0 \mid (f) + D \geq 0 \} \cup \{0\}$

$D = D_+ - D_-$

$(f) = (f)_+ - (f)_-$

...

$(f)_+ \geq D_-$

$(f)_- \leq D_+$

Prop (desigualdad de Riemann)

Sea X curva propia no-sing., $D \in \mathrm{Div}(X)$

Entonces $\ell(D) \leq \partial D + 1$

En particular, $\ell(D) < \infty$, $\forall D \in \mathrm{Div}(X)$.

Dem $D = \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot p_i$. Sea $t_i \in \mathcal{O}_{X,p_i}$ parámetro local.

$\mathcal{O}_X(D)(X)$ ~~$\hookrightarrow$~~ ~~$\oplus$~~

$\downarrow$ $\searrow$

$k(X) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X} k(\hat{\mathcal{O}}_{X,x})$

desarrollo de Laurent de $f \in k(X)$ en cada $x \in X$

$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong \mathbb{C}[\![t]\!]$

$k(\hat{\mathcal{O}}_{X,x}) \cong \mathbb{C}((t))$

~~88~~ ~~96~~
100

Teo (Riemann-Roch)
X curva proj no-sing /$\mathbb{C}$, $D \in \mathrm{Div}(X)$. Entonces

$$\ell(D) = \deg D + 1 - g + \ell(K_X(-D))$$

Obs $\ell(K_X(-D)) = \dim \{ \omega \in \tilde{K}_X \;/\; (\omega) - D \geq 0 \}$

$D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ $= \dim \{ \omega \in \tilde{K}_X \;/\; \mu_p(\omega) \geq n_p, \forall p \in X \}$

Si $D \geq 0$, $= \dim \{ \omega \in K_X(X) \;/\; \mu_p(\omega) \geq n_p, \forall p \in X \}$

(1-formas regulares con ceros $\geq D$)

Obs Aquí $g = \dim \tilde{K}_X \underset{\text{def}}{=} \ell(K_X)$ ($\tilde{L}$ = secciones racionales de L)

Vamos a usar: (sale de Stokes)

Teo. de los residuos: Sea $\omega \in \tilde{K}_X$ (1-forma racional)

Entonces $\sum_{p \in X} \mathrm{res}_p(\omega) = 0$ (def. buena de res_p)

Dem Sea $f \in \mathcal{O}_X(D)(X)$ ($(f) + D \geq 0$)

$D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i$. Entonces, $\forall \omega \in K_X(X)$,

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{res}_{p_i}(f \cdot \omega) = 0$$

Esta es una condición lineal en f para cada ω.

Si $\omega \in K_X(-D)(X)$ entonces la condición es $0 = 0$

ya que $\mathrm{res}_{p_i}(f \cdot \omega) = 0$, $\forall i$.

Observación: De esto va a salir R-R.
Ver Mumford. (yellow book)
Ver también: Serre
groups algebraicos - cosas de clase

Problema de Cousin:

Dadas $\lambda_i \in \mathbb{C}^{d_i}$ (parte polar)

$\exists\ f \in \mathcal{A}(X)$ / $\lambda_i = \lambda_i(f)$, $\forall i$

NO: las λ_i deben satisfacer el Teo. de los residuos, $\forall w \in \Omega'[X]$

$f \in \mathcal{A}(X)$, $w \in \Omega'[X]$ $\Rightarrow$ $f \cdot w \in \Omega'(X)$

$$\Rightarrow \sum_p \operatorname{res}_p(f \cdot w) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{res}_{p_i}(f \cdot w)$$

$$\| \rho$$

$$\rho = \sum \operatorname{res}_{p_i}(\lambda_i \cdot w), \quad \forall w \in \Omega'[X]$$

Pero, las $w \in \Omega'[X](-D)$ no imponen condición.

$$\mathbb{C}^d \times \Omega'[X] \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}$$

$$\downarrow \qquad \nearrow \bar{\rho}$$

$$\mathbb{C}^d \times \Omega'[X] / \Omega'[X](-D)$$

$$L(D) \subset (\Omega'/\Omega'(-D))^+$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} d_i p_i \qquad d_i \geq 0$$

$$L(D) = \{ f \in \mathbb{C}(X) \,/\, (f) + D \geq 0 \}$$

z_i uniformizante em p_i

$$\lambda_i(f) = \sum_{j=1}^{d_i} a_i^j \cdot \frac{1}{z_i^j}$$ parte polar de f em p_i

$$f = \lambda_i(f) + g_i$$

g_i holo em p_i

$$0 \to \mathbb{C} \to L(D) \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}^{d_i} = \mathbb{C}^d \qquad d = \partial D = \sum d_i$$

$$f \longmapsto (\lambda_1(f), \dots, \lambda_n(f))$$

$$\Rightarrow \quad \ell(D) - 1 \leq d$$

$$\ell(D) \leq \partial D + 1 \quad \text{(Riemann)}$$

$$0 \to \mathbb{C} \to L(D) \to \mathbb{C}^d \xrightarrow{\tilde{\rho}} \left(\Omega^1/\Omega^1(-D)\right)^* \to 0$$

Cousin: <u>es exacta</u>

<u>Dem</u> ver Mumford. (Yellow book)

<u>Cor</u> R.R : $\sum (-1)$ dim $= 0$ ✓

Cor $\partial K_X = 2p_g - 2$

Dem Tomar $D = K_X$ en R.R.

Quiero demostrar:

Prop 1 $p_g(X) = g_{top}(X)$

Dem $\partial K_X = 2g-2$ (p. 96)
$\partial K_X = 2p_g - 2$ (cor)
$\Rightarrow p_g = g$.

$(\Leftrightarrow \partial K_X = -\chi(X) = 2g_{top}(X) - 2)$

Esto va a salir de la fórmula de Hurwitz.

Prop 2 (fórmula de Hurwitz, 1)

Sea $f: X \to Y$ morfismo no-cte (i.e. finito), $\partial f = d$ entre curvas propias n.s. / $k = \bar{k}$.

Sean $y_1, \dots, y_N \in Y$ los valores críticos de f.

$f^{-1}(y_i) = \{x_{i1}, \dots, x_{in_i}\}$ $\qquad f^*(y_i) = \sum_{j=1}^{n_i} e_{ij} \cdot x_{ij}$

(si t_i es coord. local en y_i,

u_{ij} " " x_{ij}

entonces $f^*(t_i) = u_{ij}^{e_{ij}}$

i.e. f viene dada localmente por $t_i = u_{ij}^{e_{ij}}$)

Entonces: $\partial K_X = d \cdot \partial K_Y + \rho$

(def. de ρ en la dem.)

Sistemas lineales, inmersiones proyectivas

Def Sea X una VAA/k (regular en codim 1)
Un sistema lineal en X es un par (L, V)
donde L es un fibrado invertible en X y
$V \subset L(X)$ subespacio lineal de $\dim_k V = r+1 < \infty$

Denotamos

$$B = \{ x \in X \mid s(x) = 0, \ \forall x \in s \in V \}$$
$= $ conjunto de "puntos base" de (L, V)

$$s(x) \in L(x) = L_x / \mu_x \cdot L_x \simeq k$$

Prop $\exists$ biyección entre:
a) Morfismos $X \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^r$
b) Sistemas lineales (L, V) con $B = \phi$,
provistos de base ordenada $(s_0, \dots, s_r)$ de V.

Dem Dado b), defino $\phi = (s_0 : \dots : s_r) : X \to \mathbb{P}^r$

Recordar: si $t \in L(X)$, $t = (t_i)_{i \in I}$, $t_i = \varphi_{ij} t_j$.

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \qquad t_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$$

$\varphi_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_{ij})^*$ cociclo que define L.

$\Rightarrow$ $s_k = (s_{ki})_{i \in I}$

En U_i, $\phi = (s_{0i} : \dots : s_{ri})$ $\overset{\text{en } U_{ij}}{=}$ $(\varphi_{ij} s_{0j} : \dots : \varphi_{ij} s_{rj})$

En U_j, $\phi = (s_{0j} : \dots : s_{rj})$ ✓

Ej X curva, $X = \Omega^1_X$

Recíprocamente, dado $f: X \to \mathbb{P}^r$

tomo $L = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$

$V = f^* S_1 \qquad S_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)(\mathbb{P}^r)$

$s_i = f^* x_i$

Verificar que esto es biyección.

Idea: $X \subset \mathbb{P}^r$

$X \cap H$, $H \in (\mathbb{P}^r)^\vee$

familia de divisores en X

Def X VAA/k, L fibrado inversible.

El sistema lineal completo definido por L

es (L, V) donde $V = L(X)$

Si $\mathcal{B} = \emptyset$ y $r+1 = \dim L(X)$, entonces define

$$f_L : X \to \mathbb{P}^r$$

Podemos tomar $L = \mathcal{O}_X(D)$, $D \in \mathrm{Div}(X)$.

Sea X = curva (propia, n.s.)

Para $D \in \mathrm{Div}(X)$ denoto $L(D) = \mathcal{O}_X(D)(X)$

Prop $L(D-p) \cong \{ s \in L(D) \mid s(p) = 0 \}$ $\quad p \in X$.

De: ...

Prop $\partial D \geq 2g \Rightarrow \mathcal{O}_X(D)$ no tiene punto base

De Por R.R.,

$$\ell(D) = \partial D + 1 - g$$

$$\ell(D-p) = \partial(D-p) + 1 - g = \ell(D) - 1$$

$\partial(D-p) \geq 2g-1$

$\Rightarrow L(D-p) \subsetneq L(D) \quad \forall p$ ✓

Obs $L = \omega_X$ tampoco tiene punto base

(aunque tiene grado $2g-2$)

Prop X curva, $D \in \mathrm{Div}(X)$

sup. $\mathcal{O}_X(D)$ sin punto base.

a) $\phi_D : X \to \mathbb{P}^r$ inyectiva $\Leftrightarrow$ $\ell(D-p-q) = \ell(D)-2$ $\forall\, p \neq q$

b) $d\phi_D(p)$ inyectiva $\Leftrightarrow$ $\ell(D-2p) = \ell(D)-2$ $(p \in X)$

Cor $\partial D \geq 2g+1 \Rightarrow \phi_D : X \to \mathbb{P}^r$ inmersión

($\Rightarrow$ $\phi_D(X) \subset \mathbb{P}^r$ es curva de grado $= \partial D$)

$\not\Leftarrow$

Cor $L = \Omega^1_X \Rightarrow \phi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ es inmersión

(salvo si X es hiperelíptica) $\phi_L(X)$ es curva de grado $2g-2$.

Obs El conjunto de divisores $D \geq 0$, $\partial D = d$ es una variedad de dim d. $= X^{(d)} = X^d / \mathfrak{S}_d$

Obs $D \sim E \Rightarrow \phi_D = \mu \circ \phi_E$ $\mu \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r)$

$X^{(d)}/\sim \; = \mathrm{Pic}_d(X)$ es variedad de dim $= g$

$d \geq 2g+1$

[ACGH] Brill-Noether.

Aplicaciones a $\mathbb{P}^n$ y sistemas lineales

1) Ej: $f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$

$f(x) = (F_0(x) : \cdots : F_n(x))$ F_i homogéneos de grado d.

Superficie de Veronese.

$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{\nu_2} \mathbb{P}^5$ $S = \nu(\mathbb{P}^2)$

~~sistema lineal de~~

propiedad fundamental: $\nu^{-1}(S \cap H) =$ cónica en $\mathbb{P}^2$

$\rightarrow$ grado $S = 4$ (sistema lineal de cónicas)

$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{\nu_3} \mathbb{P}^9$ grado $\left(\nu_3(S) \subset \mathbb{P}^9\right) = 3 \cdot 3 = 9$ $\binom{d+n}{n}$

sistema lineal de cúbicas.

$\binom{d+2}{2} = \frac{(d+2)(d+1)}{2}$

$\frac{(d+2)(d+1)}{2} - 1 = \frac{d^2+3d}{2} = \frac{d(d+3)}{2}$

$d=3$ 9

Puntos base:

fijo $P \in \mathbb{P}^2$, considero

V = esp. vect. de cúbicas que pasan por P.

(dim vectorial = 9)

elijo base $F_0, \ldots, F_8$

$f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^8$ racional

$X = \overline{f(\mathbb{P}^2 - \{p\})}$ ($\min$ $Bl_p(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{P}^8$)

afirmo: grado$(X) = 9 - 1 = 8$

sistema lineal de cúbicas que pasan por n puntos $p_1, \ldots, p_n$

(caso $n=6$, X = ~~dibujo~~ superficie cúbica en $\mathbb{P}^3$)

ver los 27 rectas

Prop Dada cúbica $X \subset \mathbb{P}^3$, $\exists$ 6 pts en $\mathbb{P}^2$ ... (CONTAR PARÁMETROS $18-15=4$, $12-8=4$)

Problema: calcular dim de sistema lineal definido por puntos base $\rightsquigarrow$ superabundancia.

Ej cúbicas por 8 puntos

Construcción de superficies de Riemann vía monodromía.

Recordar revestimientos, monodromía, Teo. fundamental.

Prop: $f: X \to Y$ revestimiento, Y sup. de R.
X variedad topológica

$\Rightarrow \exists!$ estructura de sup. de R. en X / f es holomorfa.

Prop: también para "revestimientos ramificados" ⊛

$G = \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{p_1, \dots, p_N\})$ generado por γ_i



con única relación $\gamma_1 \cdots \gamma_N = 1$

Morfismo de grupos $\rho: G \to S_d$
$\gamma_i \mapsto \sigma_i$ $\qquad \prod \sigma_i = 1 \in S_d$

$\rightsquigarrow$ sup. de R. (compacta ramificada sobre $\mathbb{P}^1$) $\rightsquigarrow$ inmersión en algún $\mathbb{P}^n$ $\leftrightsquigarrow$ cuerpo de funciones

⊛ $f: X \to Y$ cont.
Y sup. de R.
tales que $\exists A \subset Y$ finito / $f: X - f^{-1}A \to Y - A$
es revestimiento. Entonces $\exists!$ estructura de S.R. en X
tal que f es holomorfa.

Dem Por Prop. anterior, $\exists!$ estructura en $X - f^{-1}A$
Esta estructura se puede extender a X (ejercicio)
(hay que definir cartas en los puntos de $f^{-1}A$.
Sea $x \in f^{-1}A$, $y = f(x)$
Tengo definido un índice $e = e_f(x)$, usando $\pi_1(U - \{y\}) = \pi_1(\mathbb{C}^*)$
$= \pi_1(S^1)$
U = bola con centro y.
~~[illegible]~~
Sea V = componente conexa de $f^{-1}(U - \{y\})$ que contiene x
$\to V - \{x\} \xrightarrow{f} U - \{y\}$ es revestimiento conexo
$\to$ es isomorfo a $z \mapsto z^e$ $\quad \mathbb{C}^* - \{0\} \to \mathbb{C}^* - \{0\}$
que se completa a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ✓

Idea sobre espacio de Hurwitz (moduli) "grados de libertad en la construcción"